座標を使った投影図の理解

Understanding of a Projection with Knowledge of the Coordinate System

梶山 喜一郎 Kiichiro KAJIYAMA

概要

投影図は、三次元の座標系により立体を計量的に図的表現している。大学で投影図を学ぶ者を対象に図に描いた四角錐を理解する実験をおこない、投影図に熟練していない段階の学習者が図の座標系を認知しない現象を示した。彼らが、座標系の知識にかわって投影図に描いた図形の幾何学的性質を用いて立体の頂点の位置を推論することを実験で明らかにした。彼らは、投影図を理解する過程でこの幾何図形による推論を用いるために、図に記述した立体の持つ計量的な大きさ、長さや比率、角度を誤解する。なぜ誤答者は頂点の位置の推論に座標でなく幾何図形の性質を使用するかを考察し次の二つを明らかにした。この段階の学習者は、幾何図形の座標を参照するように学習した座標系の知識を構造化していなかった。また彼らは、数学的な基礎にもとづかない内容の座標系の知識を使用していた。

キーワード：空間認識／座標系／誤答分析／正四角錐

Abstract

The following two factors disturbs students in their understanding a projection.

1. Students don't have mental operation to understand figure with coordinate. Even if they have knowledge of the coordinate system, they can't apply this knowledge in coordinate of a projection.
2. Knowledge of the coordinate system which students have is lacking in mathematical idea.

Students have three misconception about the coordinate system as follows.

- a. Students can't understand that the coordinate axes is reference frame common to a projection.
- b. Students don't use the coordinate axes to know coordinate value. They use coordinate axes as a frame to know place of figure.
- c. Students don't understand that property of figure changes between different coordinate system.

These students don't represent a projection with coordinate. They use term of similar size or measurement. In their idea, these term means size of length and size of angle. Term of a measurement doesn't mean coordinate. They don't replace figure in coordinate. They can't imagine that mistake of answer is coordinate mistake. Therefore students mistake the task.

Keywords : understanding / coordinate system / misconception

1. はじめに

立体を絵に表現するには、ピアジェが明らかにしたように描く対象を座標系の枠組み¹⁾に位置づける必要がある。大人はこの知識をもっているが、子どもは大人とおなじ知識をもっているとは限らない。図1 aの絵を描く子どもは垂直を理解しているが、まだ座標系の基準となる鉛直を理解していない。彼らは、人や建物そして樹木の図形を、地面に直角に描くことができる。しかし地面が水平でない場合、図形が水平軸に直角であっても、図形をかたむいた地面に直角に描いてしまう。図1 bの水平線に直角に、人や建物そして樹木の図形を描く子どもは、垂直だけでなく鉛直を理解している。絵のなかで建物や樹木、人などの図形を水平-鉛直の座標系に位置づけて理解していると言える。

専門家が利用する投影図も、子どもの絵とおなじようにその基礎に数学的な座標系^{2),3)}を用いている。投影図は、立体を構成する幾何図形を、図上の三次元の座標により精密に構造化している。この結果、図を測れば立体上の点の座標を知る⁴⁾ことができる。投影図は、三次元空間での左右・上下・前後の位相的な関係を表現するだけでなく、座標により立体を計量的に表現することができる。

本研究は、大学で投影図を学ぶ学習者を対象に実験をおこない、投影図に熟練していない段階の初心者が投影図の座標系を認知しないことを示す。投影図を習熟している教師あるいは技術者は、コミュニケーションの手段として投影図を利用している。もし投影図を利用する初

図1 子供の絵（模式図）

心者が、座標系の知識を使って立体を正しい比率と位置で描けないならば、あるいは座標系の知識を使ってこれらを理解できなければ、図からどのような情報をえることができるであろうか。

初心者が対象とする立体をよく知っているとしても、教師や技術者が投影図を使って説明したいと考えている立体の計量的な大きさ、長さや比率、角度は誤って理解されるであろう。初心者と熟練者との間に座標系に対する認知の差異があることを前もって知ることで、教師や技術者は、初心者が投影図でおかす誤りを診断することができる。さらには、これらの認知の違いをなくすための観点で伝統的な教材や指導方法を改善することができると思われる。

2. 目的

図2に示す正四角錐の立面図と平面図をもとに、この正四角錐をカバリエの立体図で描かせる空間課題を用いる。投影図は、正四角錐について次の2つの異なる図形情報を記述している。

1. 図形の性質、正四角錐を表す幾何図形の形状と大きさ
2. 投影図の座標系、基準となる座標軸と幾何図形の座標

座標系についての投影図の表記法は数学と異なっている。投影図では基準面あるいは基準軸からの距離としての平行座標を使用するが、この数値を座標値 xyz として図に表示しない。基準面は投影面として、基準軸は基線として表示するが、これらに計量的な目盛りをつけない。投影図を座標で理解するためには、図3に示すように座標系を視覚化して、これを参照して幾何図形の頂点の座標を計測する操作が必要である。

課題の図2 aには立面図と平面図に正四角錐を表す

幾何図形が描かれている。立体を表す幾何図形は、図3 aに示すように立体の座標を記述している。課題の正四角錐を立体図上に描く過程で、被験者は前もって頂点の位置を座標で推論しなければならない。本論文は、解答で描いた頂点の位置を分析し、被験者が座標の代わりに幾何図形の性質を用いて頂点の位置を推論していることを明らかにし、彼らが授業で教授した座標系を使用しない要因を考察することを目的とする。

3. 方法

3. 1 空間課題

課題に用いる立体は被験者が理解できるものとし、構造が単純な正四角錐を選択した。大きさは底面が一辺20mmの正方形で高さが20mmである。投影法は平行投影の正投影図とカバリエ図を選択した。平行投影の方が透視投影にくらべ座標の計測が簡単である。課題用紙にはX-Y-Zの座標軸を表示し、被験者が正投影図とカバリエ図で座標系を推測できるようにした。正四角錐の配置は、図2 aに示すように底面を図の座標軸と45度の角度にかたむけた。

この課題は、被験者が与えられた立面図と平面図から空間における正四角錐の頂点の位置を座標系で読みとることができるかを診断するために、正四角錐を立体図に表現させるものである。

3. 2 被験者の選定の手続き

実験の被験者は大学工学部で投影図を学んでいる。彼らは投影法と正投影図やカバリエ図の各種投影の単元を終え、立体図を作図する演習も経験している。彼らに課題の正四角錐をスケッチさせ、図の各部に寸法を記入させた。この作業で寸法を誤った者は、立体の構造を理解していないとして実験の対象者から除いた。次に、この対象者に正四角錐の平面図を与え立面図を描かせた。立

a. 正投影図

b. カバリエ図

図2 空間課題

a. 正投影図と座標系

b. カバリエ図と座標系

図3 投影図と座標系

表1 底面 ABCD の幾何図形と座標

(単位mm)	図形の性質	図形の座標
a. 空間	・正方形 ・ $AB=BC=CD=DA=20$	・直交座標軸 ・ $AC=BD=28$ ・ $OA=OB=14$ ・ $A(14,0)$ $B(0,14)$ $C(14,28)$ $D(28,14)$
b. 平面図	・正方形 ・ $ab=bc=cd=da=20$	・直交座標軸 ・ $ac=bd=28$ ・ $oa=ob=14$ ・ $a(14,0)$ $b(0,14)$ $c(14,28)$ $d(28,14)$
c. カバリエ図	・長方形 ・ $AB=CD=26$ ・ $BC=DA=11$	・斜交座標軸 ・ $AC=BD=28$ ・ $OA=OB=14$ ・ $A(14,0)$ $B(0,14)$ $C(14,28)$ $D(28,14)$

図4 正四角錐の誤った立体図

変化しない頂点の座標を用いることになる。

4. 結果と考察

4. 1 解答に使用する平面図の図形情報

実験群と対照群の被験者による解答の事例を図4に示す。作図の過程を観察すると、まずX-Y平面に正四角錐の底面を表現する幾何図形ABCDを描き、次に底面から高さ20mmのZ軸方向に正四角錐の頂点Pを描いている。実験群と対照群を合わせた被験者228人のうち67人(29%)が、この過程で底面の図形ABCDの形状を誤った。

実験群と対照群の誤答者は、平面図に記述した頂点abcdの座標を使用して底面の幾何図形の頂点ABCDの位置を決めたのか、あるいは平面図に記述した幾何図形の性質を使用して頂点の位置を決めたのであろうか。頂点の位置の推論に使用した平面図の図形情報を図5に示す手続きで検討する。

1) 平面図の座標の使用

立体図を座標で表現するためには、座標の基準となるカバリエ図の座標軸を平面図の座標軸と対応させなければならない。(I)解答が投影図間で共通な座標軸を考慮しているか検討する。正解と誤図1～4のタイプは、図形ABCDと座標軸X-Yの位置関係を描いており、座標軸X-Yを平面図とカバリエ図に共通な座標軸としている。これに対して誤図5と6のタイプは座標軸に対し45度の角度で置いた底面の位置を無視し、底面の図形ABCDの形状だけをカバリエ図に描いている。誤図5

面図を誤る者を、正投影図を理解できない者としてさらに実験の対象者から除いた。課題で使用する正四角錐とその正投影図を理解できる者をこの手続きで選び、実験の被験者とした。

3. 3 実験の手続き

図2の課題を説明する時に、被験者に口頭で投影図の座標や座標軸の座標系を利用して問題を解くように教示を与えた。この教示を与える被験者のグループを実験群(115名)とする。これに対して、実験群とは別の、座標系についての教示を全く与えないで課題を解くグループを対照群(113名)とする。実験は1998年6月におこなった。

3. 4 投影図の図形情報

直交座標軸の空間にある立体は、投影法の違いにより図で表現する内容が変化する。正四角錐の底面の幾何図形ABCDの性質と座標系の関係を表1に示す。空間のX-Y平面(水平投影面)上にある正四角錐の底面は正方形で辺の長さが20mmである。空間と平面図のX-Y平面は互いに直交座標軸であり、空間と平面図での底面の形状は辺の長さが20mmの正方形である。カバリエ図のX-Y平面は斜交座標軸である。このためカバリエ図での正四角錐の底面の図形は、辺の長さが11mmと26mmの長方形の図形に変化する。空間、平面図、カバリエ図に設定したX-Y座標軸はそれぞれ対応し、立体の座標の値は直交座標軸であれ斜交座標軸であれ座標系の違いにより変化しない。立体図での頂点の推論には、座標系により

I. 投影図間に共通な座標軸を考慮するか？

II. 底面の頂点に座標を使用するか？

III. 底面の全ての頂点に座標を使用するか？

図5 底面 ABCD の作図の手続きと解答分類

と6の誤答者は課題の内容を理解していないと言える。

誤図1～4のタイプが、(II)頂点の位置に座標を使用するかを検討する。誤図3は全ての頂点の位置に平面図の座標を使用していない。さらに(III)図形の全ての頂点の位置に座標を使用するのかを検討する。誤図1と2のタイプは、座標軸上にある頂点ABの位置を原点Oからそれぞれ14mmの距離で描き、平面図の頂点abの座標を使用している。しかし、座標軸上にない頂点CDの位置には平面図の座標を使用していない。

誤図4のタイプの頂点の座標は平面図と異なるが、平面図の座標を誤って測定したと考えられる。誤図4は頂点AとCのX成分がおなじ20mmで、頂点BとDのY成分がおなじく20mmであり、座標を使用して頂点の位置を求めている。この誤答者は平面図の辺oaとobの長さを誤って20mmにし、その倍の長さをもつ辺acとbdの長さを40mmにしたと考えられる。

分析の結果、誤った図形ABCDの67例は、表2に示す誤図1～6のタイプに分類できた。正解と誤図4の被験者162人が図形ABCDの頂点に平面図の座標の情報を使用した。

2) 平面図の幾何図形の性質の使用

平面図に描いた底面の図形ABCDの形状は正方形で辺の長さが20mmである。誤図1のタイプの頂点CDの位置は、辺BCとDAの長さが20mmの四角形上にある。誤

図2のタイプの頂点CDの位置は、辺ABを一辺とするひし形上にある。誤図3のタイプの頂点ABCDの位置は、辺AB, BC, DAの長さが20mmの四角形上にある。誤図5と6のタイプも、座標の代わりに平面図の底面の幾何学的な性質を使用し、ひし形の図形上に頂点ABCDを描いている。誤図5はひし形の一辺が20mmで、誤図6は一辺が28mmである。誤図6は底辺の長さを誤ったと考えられる。

以上より、誤図4のタイプを除く誤答者66人が、平面図のもつ図形情報の中から座標系の情報の代わりに図形の性質の情報を使用して図形ABCDの頂点の計量的な位置を決めたと言える。

4. 2 誤図に使用する座標系の知識

実験群と対照群で収集した誤図は、課題が座標を使って立体図を描く内容であることを知らない被験者が、解答することをあきらめるのではなく、不十分な知識を用いてなんとか工夫をして答をだしたものの⁵⁾であると仮定することができる。

被験者は誤った解答や誤った手続きを教えられたわけでもないのに、実験群と対照群の誤答は表2に示す誤図5(28例)、誤図1(19例)、誤図3(16例)の3タイプに集中している。誤答者には投影図を座標系の知識で理解できない認知的な原因があることを示している。誤答者の座標系の知識がどのような内容であったかを次に考察する。

1) 投影図間に共通な枠組みとしての座標軸

一般に、対象となる立体は直交座標の空間に置く。この空間にある座標軸X-Y-Zを投影により表現したものが正投影図やカバリエ図に示す座標軸である。投影図間では、立体だけでなく座標軸や座標が対応する関係にある。これに対して、誤図5と6のタイプは、座標軸と正四角錐の位置関係を見失って正四角錐の図形だけに注目してカバリエ図を描いている。誤答者は課題を解くときに座標軸が投影図間に共通な基準軸であることを無視している。このために、彼らは立体図の頂点の位置を求めるのに平面図の座標を利用しようとししない。

2) 座標を参照する枠組みとしての座標軸

座標軸には視覚化されていないが計量の基準となる目

表2 底面 ABCD の解答分類

誤図分類	正解	1	2	3	4	5	6	合計
実験群	89	10	1	10	0	4	1	115
対照群	72	9	1	6	1	24	0	113
合計	161	19	2	16	1	28	1	228

盛りがあり、図上の点は基準線からの距離の値、あるいは数値としての座標値をもっている。誤図1～3のタイプは座標軸を平面図とカバリエ図の共通な枠組みと認知するが、底面の図形ABCDの全ての頂点を座標で求めなかった。これらの誤図では座標軸を利用して正四角錐を左右や前後や上下の関係で表現しており、図形ABCDと座標軸X-Yの位相的な関係を正しく描いている。誤答者は、課題を解くときに幾何図形が表す水平・鉛直・奥行の位相的な関係を参照する枠組みとして座標軸を使用するが、座標軸が幾何図形の座標を参照する基準であることを無視している。

3) 幾何図形と座標軸

平面図の座標軸や座標の情報を利用することができない誤答者は、直接に知覚できるもうひとつの図形情報に注目し、この情報を頂点の位置の推論に利用しようとした。誤図1, 2, 3, 5, 6のタイプの誤答者は、カバリエ図を図形ABCDの辺の長さや角度で描き、その数量に平面図の幾何図形abcdの対応する辺の長さや角度を使用した。ではなぜ誤答者は立体図の頂点の位置に幾何図形の性質を使用することができるのか。

平面図とカバリエ図に描いた二つの正四角錐がおなじであることを確かめるためには、この二つの立体を重ね合わせればよいことである。しかし、投影図では、三次元の立体をいちいち重ねずに、図上で対応する頂点の座標を定規とコンパスで測ればすむ。

底面を図的に表現する幾何図形は座標系の違いによりその性質を変化する。底面の図形は直交座標軸の平面図では正方形であるが、斜交座標軸のカバリエ図では長方形に変化する。さらに底面の辺の長さ20mmは、カバリエ図に置かれた場所により11mmと26mmに変化する。誤答者は、底面を表現する幾何図形の性質が異なる座標軸間で変化することを理解できない。言い換えれば、彼らは座標変換の知識を用いずに課題を解いている。

4) 座標系による平面図の表象

以上の結果より、実験群と対照群の誤答者が座標で投影図を理解できない要因のひとつとして、彼らが問題解決で使用する座標系の知識が数学的な原理にもとづいていないことを指摘できる。誤図4のタイプを除く誤答者は、立体図の頂点の位置を平面図に描いた幾何図形の性質を使用して求めた。彼らは、平面図で知覚する幾何図形を思考により座標に置きかえる操作をしていない。

誤答者の用いる計量的といった言葉は、幾何図形の辺の長さや角度の大きさのことをいっているものであり、図形の座標を指しているのではない。彼らは図2 aの平

面図で図形X-Y-Zを座標軸として知覚しても、知覚した幾何図形を図3 aに示す座標系で表象していないと推測される。

4. 3 座標系の教示と解答の変化

座標系についての数学的な知識は、図形の点と数値との対応を考えることであり、この数値を使用して図形を操作することである。誤答者が投影図を座標系で表象しないもうひとつの要因として、授業での座標系の学習にもかかわらず、彼らが図に表現した頂点と数値との対応を考えるようになっていないことが考えられる。言い換えれば、誤答者は課題を解く過程で幾何図形と座標系の二つの知識を関係づけようとしなかったことが考えられる。

このことを検討するために、実験群の被験者に投影図には正四角錐の座標を記述しているとの教示を与え授業での説明を思い出させ課題を解かせた。幾何図形を座標系で理解する知識をもって課題を解く実験群がそうでない対照群に比べ底面の図形ABCDを座標で描く比率が大きくなると考えられる。

1) 平面図の座標を使用する解答の比率

解答のなかで正解と誤図4のタイプは座標を使って課題を解いている。対照群と教示を与えた実験群で座標を使用する解答の比率の違いを示したものが表3である。 χ^2 検定をおこなったところ、 χ^2 値=4.53、有意確率のp値=0.0333であり、5%の水準で有意であった。座標を使用する解答の比率は対照群の65%に対して教示を与えた実験群が77%と大きくなる。

この結果は、教示を与えなかった対照群で誤答者が正しい座標系の知識をもっているにもかかわらず、彼らは課題を解く過程でこれを幾何図形の座標と関係づけることを示している。誤答者が投影図を理解できない要因として、彼らの誤った座標系の知識を指摘した。さらに、投影図に習熟していない段階では、彼らの座標系の知識が図形の座標を参照するように構造化されていないことを指摘できる。次に教示がどのような誤りの内容に影響を与えるかを検討する。

2) 投影図間に共通な座標軸を使用しない誤りの比率

座標を使用しない誤答のなかで誤図5と6のタイプは平面図とカバリエ図の投影図間に共通な座標軸を使用し

表3 座標を使用する解答

	使用する	使用しない	合計
実験群	89	26	115
対照群	73	40	113

なかった。これ以外の正解と誤図1～4のタイプは共通な座標軸を使用した。対照群と実験群で共通な座標軸を使用しない誤りの比率の違いを示したものが表4である。フィッシャーの直接確率の計算による検定をおこなったところ、直接確率のp値=0.000116であり1%の水準で有意であった。投影図間の共通な座標軸を無視する誤りは対照群の21%に対して教示を与えた実験群は4.3%と小さくなる。

実験群では、被験者が投影図を座標系で理解することになることで、図の中の図形X-Y-Zは投影図に共通な座標軸と認知されるようになる。対照群では、被験者が共通な座標軸であることを知識としてもっていても、この知識を課題で実際に使用できずに投影図の座標軸として認知できなかった者がいると言える。

3) 平面図の幾何図形を使用する誤りの比率

座標を使用しない誤答のなかで、誤図1～3のタイプは投影図間に共通な座標軸を使用した。立体図の頂点を平面図の幾何図形の性質を使用して推論した。対照群と実験群で、これら幾何図形の性質を使用する誤りの比率の違いを示したものが表5である。 χ^2 検定をおこなったところ、 χ^2 値=0.705、有意確率のp値=0.401であり、5%の水準で有意でなかった。教示を与えた実験群18%と与えない対照群14%の比率に違いがあるとは言えない。実験群では、教示を与えても、立体図の頂点を幾何図形の性質を使用して推論する誤りには影響を与えなかった。

一度幾何図形の性質で描いた立体図を誤りであると判断するためには、座標変換の知識を必要とする。幾何図形を座標軸と座標で理解するだけでなく、図形の性質が直交座標軸と斜交座標軸の異なる座標系で変化することを前もって知っておかねばならない。この知識に欠ける被験者は、幾何図形が誤りであると気づかないし、課題が座標系の変化により変わらない立体の座標を使って解

く内容であることを理解できない。このことは、数学的な座標系の知識に欠ける誤答者には、座標を読むようにとの指示だけを与えても指導の効果がなく、彼らには座標系の基礎的な学習が必要であることを示唆している。

5. まとめ

投影図を学ぶ大学生を対象に、正投影図の図形情報をもとに立体図を描く空間課題を与えた。被験者には、座標で立体図を描けない者がいる。課題を解くときに、なぜ誤答者は座標でなく幾何図形の性質を使用して立体図の頂点の位置を推論してしまうかを説明するのが本論文の目的である。

誤答者が投影図の座標を認知できない要因として、次の2つが考察された。

1. 座標系の知識が投影図に描いた幾何図形の座標を参照するように構造化されていない。
2. 座標系の知識が数学的な基礎にもとづかない誤った内容である。

誤答者の座標系についての誤った知識は、

- a. 座標軸を知覚してもこれが投影図間に共通な座標軸であることを無視してしまう。
- b. 座標を計測するための座標軸を理解できない。このため座標軸は図形の位相的な関係を示す枠組みとして使用する。
- c. 異なる座標系で図形の性質が変化することを無視してしまう。

投影図の理解に数学的な座標系の知識を使えないこれらの誤答者は、図2の課題でX-Y-Zを座標軸として知覚しても、図3に示す座標系を表象できないと推測される。彼らの思考で、おなじとか計量的といった言葉は、幾何図形の形状や大きさのことをいっているのであり、座標を指しているのではない。誤答者は、正投影図に記述した図形情報として視覚的な幾何図形の性質を知覚するが、知覚した幾何図形を座標系に関係づけることができない。このため、彼らは知覚した幾何図形の辺や角度の大きさを計測し、この数値を立体図の頂点の位置に直接使用してしまう。

以上のことは、初心者教育では学習者に投影図を座標で理解する枠組みをもたせることが目的のひとつであることを示している。このためには、従来の投影図よりは図2の座標軸を表示したもの、さらには座標軸と座標の目盛りを表示した図3の教材を準備することが必要である。これらの視覚化した中間段階の表現を用いて、学習者が図形と座標を関係づけることを支援することが効果

表4 共通な座標軸を使用しない誤り

	使用しない	使用する	合計
実験群	5	110	115
対照群	24	89	113

表5 幾何図形の性質を使用する誤り

	幾何図形	その他	合計
実験群	21	94	115
対照群	16	97	113

的であると考えられる。城⁶⁾は斜眼紙や方眼紙、模型を用い座標系を視覚化することにより小学生でも投影図を理解できることを明らかにした。Kajiyama⁷⁾は座標の目盛りを打った投影図から図形の座標を読みながら読図の演習をする初心者用の教材を提案している。図学教育には解析幾何学の教育と異なり数学的な座標系の領域を直接に教える単元はないが、座標系の知識は投影図を理解するために前もって必要とする領域である。

参考文献

- 1) M. Brearley, E. Hitchfield. "幼児児童教育のためのピアジェ入門", 山内光哉訳, 川島書店, (1970), 72-103.
- 2) 竹山和彦. "投影法の原理と解説", 図形科学ハンドブック, 森北出版, (1980), 119-124.
- 3) I. N. Bronstein and K. A. Semendjajew. 矢野健太郎監修, "数学ハンドブック", 朝倉書店, (1985), 243-250.
- 4) 磯田浩, "基礎図学", 理工学社, (1986), 3.
- 5) 鈴木宏昭, 鈴木高士, 村山功, 杉本卓. "教科理解の認知心理学", 新曜社, (1989), 74-77.
- 6) 城仁士. "立体の投影・構成行為の発達と形成", 風間書房, (1990), 63-133.
- 7) K. Kajiyama, "Design of Computer Assisted Learning System for Reading a Drawing", Proc.6th ICECGD (1994), 267-271.

●1998年10月20日受付

かじやま きいちろう

1949年7月10日生。福岡大学工学部図学教室, 助教授。