CAD による関数曲線の高精度作図法——作図不能問題への活用

A High Accuracy Construction of Function Curves by CAD——Application to Problem Unsolvable by Construction

加川 穂積 Hozumi KAGAWA

牧 博司 Hiroshi MAKI

概要

手書きの製図は現在も広く行われているが、現尺の図面のごく微細な部分を表現することは不向きである。それらの問題を一部解決するために、CAD が有効な道具として開発されてきた。CAD 作図でも、表示画面上のメッシュより外れた点の間で線を引く場合、例えば、円と等積の正方形や角度の三分割の作図などの際に不都合が起きる。本報告では、その課題を作図する場合に近似的ではあるが十分な精度を有する方法を示す。器材はパーソナルコンピュータ (CPU=200 MHz) とレーザープリンタ (600 dpi) を使い、オペレーションシステムは MS-DOS (第6.2版) を使い、それにより作動する市販の汎用 CAD ソフト (CANDY 第7版) を使用した。最初に、作図不能とされる等積問題と角度分割の近似的解法を行うための関数曲線創製の理論的根拠を示した。次に、以下の事柄；(1) マウスとキーボード使用による、高度に拡大した表示画面の上で線引きや円を描く方法；(2) その方法を使うことで、既存の方法よりも高精度で描いた近似面積と角度の分割の例について示した。上述した関数曲線の作図精度の向上とその広範な適用は今後の問題である。

キーワード：CAD／作図不能問題／作図精度／等積

Abstract

Though still widely in use, manual instrument drawing cannot encompass any full-scale drawing of minute or occasionally microscopic machine parts in detail. Partly to solve such issues, CAD has been developed as a reasonable tool. However, even in usual CAD drawing, inconvenience can occur when we draw a line between points lying outside the monitor screen's meshes — e. g. for the present related purpose of constructing an equal square to circle and trisection of angle. This report shows a method approximate but accurate enough to detect the problems and carry out its drawing. The hardware components consist of a personal computer (CPU=200 MHz) and laser printer (600 dpi). We use an MS-DOS Version 6.2 as an operation system (OS) in point, which is suited for such general purpose CAD software (CANDY Version 7) as is normally on the market. Here first we show a theoretical basis for the function curves generation. We also present (1) a new method for drawing lines or circles as highly magnified figures on the CRT display in a mouse-keyboard combined manual operation; and (2) examples of approximate equal area of square to circle and of approximate triangulation which would be less accurate if depending on existing methods alternative to the above. The extent of accuracy of the above drawing method and how to put it to practical use are left for further consideration.

Keywords : CAD / Problem unsolvable by construction / Accuracy / Equal area

1. はじめに

CAD の拡大機能を使用すれば手書き製図で描くことのできない現尺の図面の微細な部位も同じ図中に書き入れることが可能である。また、拡大してその部分を検討することも容易である。CAD には手書き製図と異なる機能とそれを活用する技法がある。その技法を習得すれば高い作図精度の図を描くことが出来る。さらに描いた図面のファイルを保存と管理が容易で、技術者間で共有して使用できる利便性を有する。本報告は、短期間に CAD の持つ機能を習得するために、図学上の典型的な基本課題に応用することを試み、その注意すべき要点につき述べる。

図学の教科書では一般的に平面問題を最初に述べ、立体問題を重点的に解説したものが多い。平面図学でも難問は数多くあり、円と等積な正方形、任意の角度の三等分や円周の 7, 9, 11 等分などは手書き作業では困難な課題である。それらは作図不能問題¹⁾として知られており、その近似解法は教科書²⁾に「さぐり法」の適用例として解説されている。一方、CAD を使用する授業では、製図機械の使用を前提とした近似作図法は、変わるべき操作方法を考案することが難しい。近年の高精度の作図機能を持つようになった CAD 固有の機能を駆使して、それら作図不能問題を近似的に解決する方法を考えておくのも良い時期であると考えられる。

本報告は、東京理科大学理工学部、電気工学科の学生を対象とした図学の授業で実施している事例を紹介しながら現段階における CAD を用いた作図法の精度向上について提案するものである。

2. CAD 作図への数学知識の活用

受講学生が低学年生としても、彼等の数学の基礎知識は豊富であり、各種関数曲線の性質は熟知していると考えられる。それらの知識を併用した方が、CAD 作図作業手順の理解や作業時間及び作図精度は向上する。

2-1. 円と等積な正方形

円の面積 S_c は、円周率 π と半径 r の二乗の積で与えられるから、 $S_c = \pi r^2 = (\sqrt{\pi r})^2$ である。単位長さ 1 (作図では r を 45000mm とした) の円と等積な正方形の面積 S_s は、円周率の平方根値を知れば与えられる。

従って、半円周の直延長 πr を知ることが必要であり、加川、牧によりその近似解法³⁾が報告されている。 πr 値の平方根値は、 $Y = X^{0.5}$ の関数曲線を描き、 X 値として $\pi r (= 3.14159 \cdots \cdot r)$ の位置から、 X 軸と関数曲線上の Y 座標点間の線分長さ $[Y = (\pi r)^{0.5}]$ を求めることにより得られる。

2-2. 円周角度の n 分割

傾斜角 θ の原点を通る直線と原点を中心とする半径 r の円との交点の座標値 (X, Y) は、 $X = r \cos \theta$ 、と $Y = r \sin \theta$ により与えられる。 θ が円周角 2π の n 等分値であるならば、円周上の X, Y 座標点と円の中心を結んだ線分の X 軸とのなす角度 θ は求める n 等分角の一つである。したがって、作図では正弦曲線、余弦曲線を如何に正確に作図するかが n 等分⁴⁾の作図精度に強く影響する。

2-3. 任意の角度の三等分 (但し与角90度未満)

2章2節で示した n 等分の一例題であり、任意の与角の角度を余弦曲線から逆算して、その角度の三等分に対応する円周上の点を求め、その点と円の中心を結ぶ二線分を引けば基線となす各線分の角度が求める角度となる。

以上、本論で取り扱う 3 例を記したが、これらの作図で、精度の良い近似解を得るための操作で共通することは、CAD ソフトの図形拡大縮小表示機能を使い、如何に線分の交叉点の座標を正確に求めるかによる。汎用 CAD ソフト⁵⁾でも、400万倍の拡大機能と最小 0.001mm のメッシュサイズ (以後 M とする) や各種作図機能を備えたものも市販されている。その全機能を使えば 1×10^{-6} 作図精度の図を描くのも可能であるようにさえ思われる。

表1 メッシュサイズとカーソル移動速度及び与半径長さ移動時間の一例

M mm	V mm/sec	T (=r/V)
10000	34000.0	1.323 sec
100	1607.333	27.99 sec
1	124.133	6.251 min
0.01	3.976	3.14 hr
0.0001	0.498	25.1 hr

表1に、一例としてクロック周波数 200 MHz の CPU を持つパーソナルコンピュータを使い、CAD 画面の初期各メッシュサイズにおける、半径 45000mm の円弧の中心より円周上までカーソルを移動する所要時間を示した。 M を 0.001mm とするとその移動速度は 0.498 mm/sec となり、半径長さを移動するのに約 25 時間を必要とする。適度の作業時間で満足できる作図は、作業画面 (ワークシート) のメッシュサイズを適切に選定して、概略の作図を行い、必要な個所を拡大して線引きや円弧を描く精度の段階的向上にあると考えられる。

3. 作図作業

3-1. 円と等積な正方形の作図

作図作業を図1により以下に述べる。

- 基礎円 O (メッシュの 5 倍) を描く。はじめに、基礎円 O の中心点より半径 r の 9 倍に相当する線分を水平右方に基線 OP を描く。基線上に等間隔に 9 等分点 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 を設ける。
- 等分点 1 の位置で垂線を上方に引き、等分点 1 を中心とする単位半径 r の円との交叉点を点 a とする。
- 等分点 2 より垂線を上方に引き、2 の点に接する一辺 r の正方形を 45 度回転して対角線長さを目安に垂線上に点 b を設ける。[回転機能の習得]
- 点 b と点 3 を結び、その線分長さを点 3 より上方に引いた垂線上に回転移動させ、点 c を設ける。
- 以後、操作 d と類似した操作を反復して、点 4 上に点 d 、点 5 上方に点 e 、点 6 上方に点 f 、点 7 上方に点 g を設ける。
- 点 8 より垂線を上方に引き、点 8 を一 endpoint とする一辺 $2r$ の正方形を 45 度回転して、その対角長さに相当する点 h とする。($OP \perp 8h$)
- 点 9 を円の中心として半径 $3r$ の円を描き、点 9 より上方に引いた垂線との交叉点を点 i とする。($OP \perp 9i$)。

操作 f と操作 g は「操作 d と e 」による誤差の重畳を避けるための独立した操作を採用した。

- 各点 $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ を CAD のポリライン機能 (多重点線引き機能) で結び、スプライン機能 (平滑機能) で滑らかな曲線に変換する。それを「平方根曲線」と以後称呼する。[線分処理機能の習得]

課題としては、得られた平方根曲線を活用すれば解法が得られるが、原点 O から点 1 までの領域の平方根曲線が欠落している。表2に示した関係を使用して、欠落部分 $0 \sim 1$ 点間に三個所 ($0.25r, 0.5r, 0.75r$ 位置) の値

図1 円と等積の近似正方形作図

表2 基点0, A, B, C, 1を求める関係

平方根	数値	作図根拠
$1^{0.5} = \sin 90^\circ$	$= 1$	単位円弧との交叉点
$0.75^{0.5} = \sin 60^\circ$	$= 0.8660254038$	円周の6等分点
$0.5^{0.5} = \sin 45^\circ$	$= 0.7071067812$	対角線と円弧の交叉点の線分長さの移動
$0.25^{0.5} = \sin 30^\circ$	$= 0.5$	線分の二等分線
$0^{0.5} = \sin 0^\circ$	$= 0$	

を求め、A, B, C点とする。それらの点は正弦関数を活用して得られる。操作a.~h.より求めた点群に原点0, 点A, 点B, 点Cを加えてスプライン処理したものが、図1の平方根曲線である。

線分OP上方に、半円周長さ($L_s = \pi r$)をCADファイルの登録部品中から呼び出し、その位置を定点E₁して、そのE₁点から下方に垂線を引き、基線と平方根曲線の交叉点をそれぞれL, mとする。線分Lmは求める正方形の一辺の長さである。線分Lmを半径として円を描き、基線上の交叉点をNとする。正方形生成機能でm点を始点、N点を終点とする正方形を描いたものが、図中の円と等積の正方形□mLNqである。正方形を複製しハッチングをして図1に示した。[複製と移動機能]

線分と円の交叉点が表示画面のメッシュ上に見出せない場合は、キーボードの「ROLL UP / DOWN」キーで

画面を拡大する。その際、交叉点が画面中央に位置するように、「→←↑↓」キーで調整する。[カーソルの複合操作]

作図で使用した半円周の直延線分長さ $L_s (= 2 \pi r)$ は図1の上部位置に図名「from Part List」で与えた。 L_s 値は基礎円O₁の右方、半径rの3倍の距離に位置する円O₃の中心にXY座標を設定し、直線CC₁($Y = X - r$ の一部)及び直線G₁G₂($Y = -kX - 5r/6$ の一部;kは定数)の交叉点E₀を数値計算と作図により求める事で得られる。³⁾ E₀点より基線AD上に下ろした垂線の交叉点E₁とA点間距離AE₁が直延長 L_s である。

3-2. 円周角度のn(=7, 9, 11)分割

作図作業の手順を図2により以下に述べる。

a. 基礎円Q($r = 9$ M, M間隔=5000mm)と半径の4倍、右方水平位置に点Pを設ける。線分QPは角度0~360度に対応する線分とする。基礎円の右方r隔たった位置(90度)まで5度間隔で上方に垂線(長さ9 M)を18本引く。基礎円の半径長さをCADの複製機能で、5度間隔で反時計回りに、18本複製し基礎円上に交叉点1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18を定める。[交叉点決定後補助線を除去した]

b. 基礎円の中心と各点を結んだ線分の基線に対する垂直高さを半径長さで除した値は、対応する角度 θ の余弦

図2 円周角の7, 9, 11等分角度の近似作図

図3 任意角度の近似三等分方法

値である。

- c. 円上の交叉点から、左方の対応する垂線との交叉点を a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r とし、その各点を順次ポリライン機能を使い接続し、スプライン機能で滑らかな余弦近似曲線を得る。
- d. 点 P と点 Q よりメッシュ間隔の n 倍の線分を引き、 n 等分し、各等分点を $P_0 \sim P_n$ と $Q_0 \sim Q_n$ とする。
- e. P_{11} と Q_{11} , P_9 と Q_9 , P_7 と Q_7 を結び、上方に移動した基線 QP の補助線分 ($Q_c P_c$ 等) と図 2 の線分 L_{11} , L_9 ,

L_7 の交叉点は、360度を 11, 9, 7 等分した角度位置である。

- f. 各等分点より上ないし下方に垂線を余弦曲線上に伸ばし、その各交叉点より水平線を引き、基礎円周との交叉点 R_{11} , R_9 , R_7 とする。基礎円の中心 Q と R_{11} , R_9 , R_7 を結んだ三線分と基線 QP とのなす角度は、円周角を 11, 9, 7 等分したもの各一角であり、図 2 の左下方 [長方形中の 7, 9, 11 で表示した座標] に各分割線分を取り出し、線分長さを矢印上の数値により示した。

3-3. 任意の角度の三等分

作図作業の手順を図3により以下に述べる。3章2節で使用した余弦曲線を使い、与角を構成する二辺の一辺を基線QPに重ね、二線分の交叉する点を基礎円の中心に移動する。[回転と移動機能の習得]

- a. 他の一辺と基礎円との交叉する位置をE、その点より水平線を引き、余弦曲線との交叉点をFとする。F点から垂線を下し、垂直座標軸の0.6位置で基線に水平に引いた補助線分との交差点をF₀とする。
- b. F₀より右方、線分O_AO_Bとの交叉点をP₀とする。その2点から下方と上方に、メッシュ長さの3倍の線分を引き、その3等分点を、各F₁~F₃、P₁~P₃を設ける。対応する等分点間を結び、補助線分F) O) P₀を三等分する。[線分の等分法]
- c. 補助基線上の分割点をF₁とF₂とし、その点から下方に垂線を引き、余弦曲線との交叉点をf₁、f₂とする。
- d. f₁、f₂より水平線を右方に引き、基礎円周上の交叉点を、f_{1d}、f_{2d}とする。その2点と基礎円の中心Qと結ぶ線分と基線のなす角は、与角の1/3、2/3分割角である。図3に矢印と数値で円周上の各点と垂直軸間距離を示した。

4. 作図の結果

4-1. CAD機能による線分長さの検証

使用したCADソフトのスプライン機能は、線分群の50点までを三次までの関数で近似するものである。Y=X^{0.5}曲線の作図精度と比較して余弦関数の近似曲線値は、cos X = 1 - X²/2! + X⁴/4! - X⁶/6! + …で与えられるので、4次と6次の項を省略したCADソフトの関数近似では、精度が落ちる。よって、端点の数を限度まで増加させた線分のスプライン化を行うほうが良い近似曲線が得られる。その場合、作図すべき線分等の増加により作図時間と誤操作の可能性は急増する。

4-2. 作図精度の検証

a) 円と等積の正方形

表3に示した、線分長さの理論値Ltと作図の値Lmとの値が異なるのは、計算機では倍精度の有効桁数で約14桁の計算が可能でも、CADソフトの取り扱う桁数は、現在、8桁であることに原因がある。CADソフトの角度分解能は現時点では0.1度程度である。したがって、角度の算出には、角度を構成する二線分の長さをCADの「二点間距離表示機能」で検出して、逆三角関数で角度を算出する方法を採用した。半円周の作図長さは、図1に数値で示したごとく141373.174mmであり、半

表3 半径長さr=45000 (mm)の時の直延長さの計算値Ltと平方根値Lm及びその比率((Lm / Lt) - 1)

Lt(mm)	Ls(mm)	Ls/r	((Ls/Lt) - 1)
141371.669	141373.174	3.14162089	+0.001064%
Lt (mm)	Lm(mm)	Lm/r	((Lm/Lt) - 1)
79860.423	79730.83	1.77179622	-0.0139%

表4 角度のn等分の計算値θt(度)、実測値θm(度)と線分長さL (mm)及び比率(θm / θt - 1)

n	θ t	θ m	(θ m / θ t) - 1	L (mm)
11	32.72727273	32.71880292	-0.026 %	37860.005
9	40.0	39.99999988	-3 × 10 ⁻⁷ %	34472.0
7	51.42857143	51.43024079	+0.0032%	28056.016

表5 半径rが45000 (mm)、与角の三等分の計算値θt(度)、実測値θm(度)、その比率(θm / θt - 1)と線分長さL (mm)

θ t	θ m	(θ m / θ t) - 1	L m
41.63353934	41.63353934	0%	40000
13.87784645	13.88356894	+0.0412%	43685.34
27.75569289	27.76053893	+0.0174%	39820.589

径が45000mmであることを考慮すると、πの近似値として3.141626089を得る。

それはπの真値より1.06 × 10⁻³%大きい。筆者等の報告した半円周の直延の計算誤差値は、πの真値の-2 × 10⁻⁵%以下と小さく、その差は、CADの作図精度に起因している。しかるに、既存の理論精度²⁾は-0.002%であり、手書きの作図をしてその精度を算出するに際し、器材として大型工具顕微鏡を使用しても、寸法の計測は困難で、手書き作図の精度の推定は無理がある。CADの「二点間距離表示機能」による作図精度検出方法は精度が極めて高いことを示している。表3の上段に示した、半円周の直延点Lsから、平方根曲線に垂線をおろし得られた交叉点mと基線までの長さLm(表の下段)は、79730.83となり、半径長さで除して、πの平方根の値(Lm/r)として1.77179622を得た。その線分長さを二乗して得られる正方形の面積Ssは計算値Stより0.0139%ほど小さい値となる。誤差の原因は、平方根曲線の不正確と線引き作図誤差の重畳であると思われる。

b) 円周のn等分

CADソフトに備えられている角度の創製機能では、

例示した0～41.63度間の二直線のなす角度の作図で、0.72%以上の誤差が発生する。角度の検証法として、図形の線分の長さ L_m を求め、半径長さ r との比より電卓の関数計算機能によって角度 θ_m を小数点以下9桁まで求めた。表4に示したごとく、円周の7等分の角度値 θ_m は計算値 θ_t と比較して； $[(\theta_m / \theta_t) - 1] \times 100$ の関係より、+0.0032% (+0.0017度)、9等分角は-0.0000003% (1.2×10^{-7} 度小さい)、11等分角は-0.026% (0.0084度小さい) の作図誤差であった。本作図誤差の絶対値の平均値でCADの角度誤差を除して得た値は、CADの角度分割及び創製機能による誤差と比較して約74倍の高精度が得られた。

c) 任意の角度の三等分

表5に示したごとく、与角 θ_t を与える、底辺 $r = 45000\text{mm}$ 、高さ $H = 40000\text{mm}$ の三角形の斜辺と底辺とのなす角度値は41.63353934度である。作図により得られた等分角 θ_m の各角度は、13.8835度 (計算値 θ_t より+0.0412%, 0.0057度大きい) と27.7605度 (計算値 θ_t より+0.0174%, 0.0048度大きい) を得た。CADソフトの角度分解能力より、誤差の絶対値の平均値で24.5倍の精度を得た。前述の4章2節b)項と同様に低い作図精度であった。余弦関数曲線の作図精度とCAD機能の向上で、提示した作図操作法でも精度の向上が今後期待できる。

4-3. 基本機能の習得と技法

本作図作業では使用したCADソフトの持つ、以下の基本機能を使用する。

- 部品ファイルへの登録と呼び出し、
- 「マウス」とキーボード上の「ROLL UP / DOWN」キー及び「 $\rightarrow \leftarrow \uparrow \downarrow$ 」キーの三種類の複合操作による線引き作業と円弧の作図、
- 図形や線分の回転、複製及び移動操作、
- 作図中の表示画面を任意の位置で拡大縮小による作図時間の短縮、
- その他に文献(3)に述べた、線分の分割法、拡大画面でのガイドラインを使う線引き法などである。

4-4. 習得すると便利な技法

使用したCADソフトの場合では、本研究で得られたコンピュータ操作上の特長は以下のごとく、

- 部品ファイルにある半円周の直延の図を円と等積な正方形の作業画面に呼び出す際に、図4のごとく平方根曲線と基線の近傍にすることが要点である。その理由は、二本の直延線分の端点(矢印)で交差点を求める曲線を挟むことで、線引きする始点と終点が明確になり作業が容易になるためである。
- 線分上に交差点を求める場合、始点を有する図形を対称位置に複製して線分を挟むことにより、上述のa.と同じ理由で、線引きの時間が短縮できる。
- 図2のごとく角度を分割する作業では、予測される

図4 部品ファイルより呼び出しの例

角度位置の余弦曲線近傍に補助基線を設け、角度を分割することにより、拡大画面での線引き所要時間の短縮が可能となる。

d. 実操作では、関連する線、円弧は色分けしたり線の太さを統一して描くことで、誤操作の減少と作業効率が向上する。図1と図4を比較して、一部線分の形態が異なるのは、図4は色分けして描いた原図を白黒のプリンタにより出力したためである。

e. 初期作業画面のメッシュサイズは、描いた図の移動、回転や登録部品の呼び出しを行う領域を確保するために、最大メッシュより $1/2$ から $1/4$ 小さいメッシュサイズを選定する。関連する部品は、同じメッシュサイズに統一して描くと良い。

以上が、本作図作業での習得できる利点である。

5. おわりに

CAD機能の習得を目的に、それらの機能を習得する例題として、これまで作図不能問題とよばれている中の二、三を選んでCADによる作図を行った。その結果、本作業には関数曲線使用が必須条件であることを見出した。また、コンピュータ操作上の技術的手法を提案した。高精度の関数曲線は製作に長い時間を要するが、その曲線がCADソフトの部品データファイルに登録され、作業間で共有される場合には、高い精度の作図が短時間で可能になる。さらに、CADソフトの機能向上がなされれば、理論的に期待される精度に接近すると思われる。

参考文献

- (1) 尾本義一他、公式と数表[一般編]、電気書院(1965)、105.
- (2) 成瀬政男他、図学第20版、昇華房、(1976).
- (3) 加川穂積、牧博司、図学におけるCAD教育の一事例(円の直延)、図学研究、33(1999)63-68.
- (4) 狩集住義他、電気電子製図改訂版、実教出版(1998)20.
- (5) 株式会社アスキー、CANDY 7 ユーザーズマニュアル、(1997).

●1999年3月16日受付

かがわ ほづみ

1938年生

東京理科大学研究科修了

東京理科大学理工学部講師、著書 理工学辞典「分筆」

まき ひろし

1931年生

早稲田大学理工学部卒

東京理科大学理工学部教授、著書 初心者のための機械設計製図読本、半径流ガスタービンの設計、流体計測法