細分割曲面のメッシュ数削減のための分割制御手法

A Method of Decreasing the Number of Meshes in Subdivision Surfaces

三浦 貴宏 Takahiro MIURA

徐 嶢 Zheng XU

近藤 邦雄 Kunio KONDO

概要

細分割曲面とは任意位相の多面体を再帰的に細分割して得られる曲面のことであり、コンピュータ支援による形状設計の主要な曲面表現の一つになっている。細分割曲面は曲面の形状を微小な面の集合として表現しており、表示する際には、要求精度に応じた回数だけ細分割処理を行なった後、微小になった面を1枚ずつ表示させる。したがって細分割処理の回数が多いほど滑らかな形状になるが、面の数が急激に増すために、表示に要する時間が増すことになる。本研究では、指定された誤差の範囲内で形状を保ったまま面数を削減し、表示の品質を落さずに表示速度を向上させることを目的とする。このために、本研究では、Doo-Sabinの細分割曲面を対象として、指定された誤差の中で形状を保ちながら、不必要な分割を抑制し、細分割処理による面数の増加を軽減させる手法を提案する。本研究の成果は以下のようである。本提案手法により、要求された精度内で形状を保ったままで、面数が少ない細分割曲面を生成することができた。本提案手法は、より平面に近い領域が多いほど効果があり、より分割回数が多くて面が小さく滑らかな形状ほど効果があることがわかった。

キーワード：CAGD／細分割曲面／ポリゴン／メッシュ削減

Abstract

Recursive subdivision methods are widely used in Computer Aided Geometric Design (CAGD) for generating smooth surfaces from arbitrary topological meshes. A big problem is, however, the more subdivision process is applied, the more meshes generated and the drawing cost becomes large. For solving this problem, in this paper, we extend Doo and Sabin's subdivision algorithm to control the increase of the number of meshes generated in subdivision process. The new method can generate shapes using fewer meshes than Doo-Sabin's process does.

Keywords : CAGD (Computer Aided Geometric Design) / Recursive Subdivision Surfaces / Polygon / Mesh Reduction

1. はじめに

細分割曲面とは任意位相の多面体を再帰的に細分割して得られる曲面のことであり、コンピュータ支援による形状設計（CAGD）の主要な曲面表現の一つになっている¹⁾。Chaikin¹⁾の多角形から再帰的に2次Bスプライン曲線を生成するアイデアを基に、CatmullとClarkが任意位相の多面体から再帰的に滑らかな曲面を生成する手法を提案した²⁾。彼らは2次と3次の分割式による手法を提案したが、DooとSabinはこの手法の分析を行ない、その結果を基に2次の手法を改良した手法を提案した³⁾。細分割曲面は曲面の形状を微小な面の集合として表現しており、表示する際には、要求精度に応じた回数だけ細分割処理を行なった後、微小になった面を1枚ずつ表示させる。細分割処理の回数が多いほど滑らかな形状になるが、面の数が急激に増すために、表示に要する時間が増すことになる。

本研究では、指定された誤差の範囲内で形状を保ったまま面数を削減し、表示の品質を落さずに表示速度を向上させることを目的とする。このために、本研究では、Doo-Sabinの細分割曲面を対象として、指定された誤差の中で形状を保ちながら、不必要な分割を抑制し、細分割処理による面数の増加を軽減させる手法を提案する。

本提案手法には次の特長がある。面数が削減された細分割曲面は、従来の細分割処理を行なった後、そのデータに対して面数の削減処理を行なうことによって生成できる。しかし、この方法では面数が多くなるために、細分割処理に時間がかかるとともに、分割後の面数削減にも多くの時間を要する。本手法は、このように細分割処理と面数の削減処理を分けて行なうのではなく、同時に行なうため、処理時間の面において有効である。

2. 細分割手法

本論文で提案する手法はDoo-Sabinの手法に基づいている。そこで本章では、Doo-Sabinの手法の基になっ

図1 Chaikin アルゴリズム

図2 Doo-Sabin の細分割処理 1

た Chaikin のアルゴリズムについて述べ、次に Doo-Sabin の手法について述べる。

2-1. Chaikin のアルゴリズム

Chaikin のアルゴリズム⁶⁾は、多角形の角を再帰的に削り落とす処理を行なって、極限において2次Bスプライン曲線を生成する手法である。

図1は、Chaikin のアルゴリズムを用いた2次Bスプライン曲線の生成過程を表している。A₀, ..., A₃は初期多角形、B₀, ..., B₇は細分割処理を1回行なった後の多角形、C₀, ..., C₁₅は細分割処理を2回行なった後の多角形を表している。

細分割処理は、次のようになる。多角形の各辺に対して、 $\frac{1}{4}$ と $\frac{3}{4}$ の内分点を取り、これを分割後の頂点とする。図では、辺A₀A₁における頂点B₀B₁、辺A₁A₂における頂点B₂B₃などに対応する。次に、隣合う分割後の頂点どうしを結び、分割後の辺とする。この細分割処理を無限に繰り返すと2次のBスプライン曲線が得られる。

2-2. Doo-Sabin の細分割手法

Doo-Sabin 法³⁾は、任意位相の多面体メッシュから、再帰的に多面体の角を削り落して、極限においてC¹連続の滑らかな曲面を生成する手法である。

1回の細分割処理は次のようになる。まず、各面に対して面を構成する頂点座標V_iから式1に従って、分割後の頂点の座標V'_iを計算する(図2)。nは、面の構成頂点数を示している。

$$V'_i = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{ij} V_j$$

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \frac{n+5}{4n} & \text{for } i=j \\ \frac{3+2\cos(2(i-j)\pi/n)}{4n} & \text{for } i \neq j \end{cases}$$

図3 Doo-Sabin の細分割処理 2

次に面に対応するF-face、稜線に対応するE-face、頂点に対応するV-faceができるように、各頂点を結ぶ稜線を作る(図3)⁴⁾。この細分割処理を再帰的に繰り返すと、滑らかな曲面が得られる。

1つの閉じた多面体に対しては、Doo-Sabin 法における分割回数と面数・稜線数・頂点数の関係は以下のようになる。分割回数を*i*としたときの面数を*n_fⁱ*、稜線数を*n_eⁱ*、頂点数を*n_vⁱ*とすると、

$$n_f^i = \frac{4^i}{2} n_e^0 + 2$$

$$n_e^i = 4^i n_e^0$$

$$n_v^i = \frac{4^i}{2} n_e^0$$

という関係が成り立つ。

このように、分割後の各データの数、初期メッシュのデータ数に依存するが、初期メッシュの形状には依存しない。また、Doo-Sabin の手法は分割回数が増すことにより、式2によりデータ量が増加する。

本論文で提案する手法は、初期メッシュの形状を参照して、不必要な分割を行なうことなく、データ数の増加を抑制する手法である。次章で、この提案手法について述べる。

図4 Chaikin のアルゴリズムによる直線領域の分割2

(a) 1回目の分割

(b) 2回目の分割

図5 直線領域の分割を行わない曲線の細分割

3. メッシュ数削減手法

本提案手法では、再帰的な細分割処理の過程において、十分平面に近い領域ではそれ以降の分割を行わないことによって面数の削減を実現する。

本節では最初に、無限に細分割処理を繰り返して得られる曲面（以降、極限曲面と呼ぶ）が完全な平面を含む場合において、細分割処理後にこの平面部を構成する面の数を削減する手法を提案する。次に、この手法を応用して、極限曲面の各領域の平面への近付き具合によって分割を制御し、面数を削減する手法を提案する。

3-3. 平面非分割法

3. 1. 1 直線部の非分割

本節では Chaikin のアルゴリズムを基に2次Bスプライン曲線の直線部の非分割法を提案する。

図4に、Chaikin のアルゴリズムによる直線部を含む曲線の生成を示す。2次Bスプライン曲線は、各制御辺の中点を通過する性質を持つ。そのため、同図のように隣合う2つの制御辺 P_0P_1 , P_1P_2 が同一直線にある場合、この2つの制御辺の中点 A_0 , A_1 の間の領域は直線になる。このような形状に対して、Chaikin の細分割処理を繰り返行なうと同図のように直線部に多くの頂点が生じる。この直線部を分割しないことにより頂点数を削減する方法を以下に示す。

ここで、図5 (a) に示すように、同一直線に並んだ2つの制御辺 A_0A_1 , A_1A_2 の共通の頂点 A_1 に対応した分割後の制御辺（同図 (a) L_1 ）を非分割制御辺とし、次の分割処理において新しい頂点を生成しないようにする。次の分割処理を行なうと同図 (b) になる。辺 B_0B_1 に対して頂点 C_0 , C_1 、辺 B_2B_3 に対して頂点 C_2 , C_3 を生成するが、辺 B_1B_2 ($=L_1$) は非分割制御辺であるため頂点を生成せず、同図 (b) L_2 のように非分割制御辺を伸ばす。

この手法で細分割処理を繰り返すと、非分割制御辺が伸びていき、 L_{00} は直線部 P_0P_1 (P_0 は辺 A_0A_1 の中点, P_1

は辺 A_1A_2 の中点) に一致する。これにより、同一直線の再分割を行なうことなく、頂点を減らすことが可能となる。

3. 1. 2 平面部の非分割

本節では述べた直線部の非分割法を平面部の非分割法に応用し、極限曲面における平面部の面数を削減する方法について述べる。

図6は、ある頂点を共有する面がすべて同一平面にある場合の分割を示している。同図 (a) の頂点 A を共有する面 $F_0 \dots F_3$ はすべて同一平面にあるとする。これを従来の手法で細分割を繰り返行なうと、極限曲面は頂点 A の座標を通る平面を含み、その平面は多くの面で構成されることになる。

本手法では分割後の頂点の生成を行なわない非分割面を利用して、次の処理を行なう。まず、1回目の分割のとき同図 (a) のように、分割によって生成された頂点 A に対応する V-face を非分割面にする。次に、2回目の分割のときは同図 (b) のように、1回目の分割で生成された非分割面に対して、分割後の頂点を生成しないようにする。その結果、図のように分割によって非分割面が広がる。この手法で分割を繰り返すと、非分割面は広がり続け、極限において曲面上の平面部と一致する。この手法によって、平面部を分割することなく、一つの非分割面とすることが可能となる。

3-2. 曲面非分割法

本節では、前章の平面非分割法を応用して面数を削減する手法を提案する。この手法は、極限曲面の各領域の平面への近付き具合による分割制御を用いる。

3. 2. 1 曲面非分割法の概要

本研究では、分割によって生成された V-face に加え

(a) 1回目の分割

(b) 2回目の分割

図6 平面になる領域

て、E-face も非分割面にし、それぞれV型非分割面、E型非分割面と呼んで区別する。また、V型非分割面に対応する分割前の頂点を非分割頂点、E型非分割面に対応する分割前の稜線を非分割稜線と呼ぶことにする。また、これらの非分割面を構成する頂点と稜線を、境界頂点、境界稜線と呼ぶことにする。また、非分割面に対して、一般の分割後の頂点を生成する面を分割面と呼ぶことにする。

ここで、初期多面体メッシュと細分割処理の回数を表す分割回数と、頂点周辺の領域が十分平面に近いかどうかの判定に用いる角度差を入力とする。本手法は以下の3つの処理で構成されている。

Step (1) : 境界頂点以外のすべての頂点を調べて、頂点の周囲の形状がほぼ平面になっていると判定されるか、分割回数が指定された回数よりも大きくなった場合は、その頂点を非分割頂点にする。次に境界稜線以外のすべての稜線を調べて、その稜線の端点が非分割頂点か境界頂点のどちらかであれば、その稜線を非分割稜線にする。

Step (2) : 非分割面以外の面に対して、Doo-Sabinの細分割式に従って分割後の頂点座標を計算する。次に非分割頂点に対してはV型非分割面、非分割稜線に対してはE型非分割面を生成し、その他は従来のF-face、

図7 頂点周辺の平面判定

E-face, V-face を生成する。

ここで、すべての頂点が境界頂点になったら、後述の**Step (3)**の処理を行ない、細分割処理を終了する。そうでなければ、**Step (1)**に戻る。

Step (3) : 残った非分割面以外の面を、その面の頂点を面の中心に移動させて、非分割E-faceを線分にし、細分割を終了する。

以下、**Step (1)**の頂点周辺の平面判定、**Step (2)**の非分割面を用いた細分割処理、**Step (3)**の分割面の頂点の移動について詳しく説明する。

3. 2. 2 頂点周辺の平面判定 (Step (1))

ある頂点の周囲の領域が平面になっていれば、その領域は分割によって形状が変わることはない。そのため、この領域を分割をする必要はなく、それによって同じ領域を従来法よりも少ない面数で表現することが可能になる。この性質を用いて、平面ではないが十分平面に近い領域も含めて分割を行なわないようにすることにより、一般的な曲面形状における面数の削減を実現する。

図7に頂点周囲の平面判定方法を示す。頂点Vを共有する面 F_i に対して単位法線ベクトル n_i をそれぞれ求める。 n_i の平均 n をその頂点における法線ベクトルとする。次に頂点の法線ベクトル n と頂点の各面の法線ベクトル n_i との角度差 θ_i をそれぞれ調べる。 θ_i がすべて0なら、その頂点の周囲は平面になっている。この θ_i の最大値が指定された許容誤差以下であれば、頂点Vの周囲は十分平面に近いと判定する。

このように判定された頂点は非分割頂点にする。この頂点により作られるV-faceは**Step (2)**によりV型非分割面になり、それ以降の細分割処理において、この頂点周辺の領域は分割されなくなる。

3. 2. 3 非分割面を用いた細分割処理 (Step (2))

本節では、十分平面に近い領域の分割を禁止するための非分割面を用いた細分割処理について述べる。

この処理の過程を図8に示す。同図(8a)のよう

図8 非分割面を用いた細分割処理

に、Step (1) の処理によって、頂点 v_a の周辺が十分平面に近付いていると判定され、この頂点が非分割頂点になったとする。このメッシュに対して細分割処理を行なうとき、同図 (b) のように v_a に対応する V-face を V 型非分割面 V_1 にする。次に、頂点 v_b が非分割頂点になったとすると、Step (1) の処理により稜線 e_a が非分割稜線になる。このメッシュに対して、2 回目の細分割処理を行なうと、同図 (c) のようになる。V 型非分割面 V_1 に対して、分割後の頂点を生成しないようにする。このため V_1 は分割によって面が広がる。また、 v_b に対応する V-face を V 型非分割面にし、 e_a に対応する E-face を E 型非分割面にする。

このようにして、非分割面を用いることによって、不要な分割が禁止され、面数の増加が抑制される。

3. 2. 4 分割面の頂点の移動 (Step (3))

本手法による分割を繰り返すと、V 型非分割面、E 型非分割面が増え、ある時点ですべての頂点が境界頂点になり、Step (1) の平面判定をする頂点が存在しなくなる。その状態は、図 9 のように、分割面がそれぞれ孤立し、それらどうしを E 型非分割面が結ぶ形になる。この状態で Step (2) の分割を行なうと、常に F-face のみが作られるようになり、その F-face は面を構成す

図9 分割面の頂点の移動

る頂点の平均座標に向かって収束していく。それに伴い、分割面は図 9 のように 1 点に向かって収束し、これに伴い E 型非分割面は実線で示される線分に収束していく。極限において、分割面は極限曲面上の点になり、メッシュの頂点と稜線のデータ上の重なりをなくすことにより、面数が削減されたメッシュが得られる。

以上の処理は次の処理と同等であるため、本手法の最後の処理として、次の処理を行なう。

頂点がすべて境界頂点になった時、その時点で分割処理をやめ、残った分割領域の中心座標を計算し、この座標を持つ頂点を生成する。次にこれらの頂点を E 型非分割面に沿うように繋ぐメッシュを生成する。これが面数が削減されたメッシュとなる。

以上で、平面に近い領域ほど分割されず、面数が削減された Doo-Sabin 手法による細分割曲面が生成される。

3. 2. 5 生成曲面の連続性の考察

Doo-Sabin の手法は、分割を繰り返すと、隣合う面どうしの角度差が小さくなり、極限においてその角度差は 0° となる。この形状は、すべての点において C^1 連続の曲面になる。

本提案手法では、細分割処理の過程で前述の平面判定法によって、平面とみなされた領域は、以後分割を行なわない。角度差を 0° にすると、極限における形状は、従来法と全く同じ形状になり、すべての領域において C^1 連続になる。角度差を 0° 以外にすると、細分割処理の過程で、ある分割回数に達すると、平面領域と判定され、その領域の分割を終了する。したがって、角度差を 0° 以外にした場合は、平面領域以外は不連続な形状になる。

Doo-Sabin の手法では、数回分割すると、曲面がかなり滑らかになるが、隣合う面の角度差はすべて 0° ではなく、不連続な形状である。本提案手法は、ユーザが

表1 従来法とのデータ量の比較

	従来法	角度差 5°	角度差 10°
クラブ	6018	4924 (81.8%)	2536 (42.4%)
マウス	7170	3245 (45.3%)	1133 (15.8%)
フィレット	42242	15738 (37.3%)	3828 (9.1%)

曲面の滑らかさを指定するために、角度差を入力する。
この角度差の大きさにより、分割回数が決定される。角
度差が大きい場合は、分割回数は少なくなる。

4. 評価実験

本提案手法の有効性を評価するために、以下の3つの
実験を行なった。

(1) 面数の削減による表示結果と数値比較

実験対象として全体的に滑らかな形状（ゴルフクラ
ブ）、平面に近い領域を多く含む形状（マウス）、平面を
多く含む形状（フィレットをかけた形状）の3つの形状
を用いた。入力角度差を5°と10°として、表示と面数の
比較を行なった。

(2) 曲面形状の違いと面数の圧縮率の関係

1で用いた3つの形状に対して、分割回数を4回にし
て、面数の圧縮率の変化を角度差0°～15°の範囲で比べ
た。

(3) 分割回数と面数の圧縮率の関係

1のゴルフクラブに対して、分割回数を3回、4
回、5回にした場合の面の数の圧縮率の変化について角
度差0°～15°の範囲で調べた。

5. 結果と考察

(1) 面数の削減による表示結果と数値比較

表示結果を図10～図12に示す。分割回数は、フィレ
ットをかけた形状の表示のみ3回で、その他はすべて4回
にした。

これらの結果から、平面に近い領域ほど、分割回数が
少なく面が大きくなっていることがわかる。また、角度
差が大きくなるほど、面の歪みが大きくなっていること
がわかる。

3つの形状に対する従来法と本手法の角度差5°と10°
の面数を表1に示す。この表から、角度差が大きくなる
に従って、面数が減少していることがわかる。頂点数に
対しても、これと類似した結果が得られた。分割回数
は、すべて4回にした。

(a) 従来法

(b) 提案法 (角度差: 5°)

(c) 提案法 (角度差: 10°)

図10 ゴルフクラブの例（4回分割）

(a) 従来法

(b) 提案法 (角度差: 5°)

(c) 提案法 (角度差: 10°)

図11 マウスの例 (4回分割)

(a) 従来法

(b) 提案法 (角度差: 5°)

(c) 提案法 (角度差: 10°)

図12 フィレット形状の例の例 (3回分割)

図13 形状の違いと圧縮率との関係

図14 分割回数と圧縮率との関係

(2) 曲面形状の違いと面数の圧縮率の関係

図13は形状の違いと面数の圧縮率の関係をグラフにしたものである。平面、または平面に近い形を含む形状ほど、圧縮率がよいことがわかる。本手法を様々な形状に適用した結果、形状にもよるが角度差がおおよそ $5^{\circ} \sim 10^{\circ}$ くらいまでは、形状特徴を保持した表示結果が得られた。

(3) 分割回数と面数の圧縮率の関係

図14は、分割回数と面数の圧縮率の関係をグラフにしたものである。分割回数が多いほど圧縮率が上がっていることがわかる。頂点数に対しても同じような結果が得られた。この結果から、分割回数が多く滑らかな形状に対するほど、圧縮率が上がることから、本手法が面数の圧縮に有効であることがわかる。

6. まとめ

本研究では、細分割曲面の表示速度を向上させることを目的として、代表的な細分割曲面の一つである Doo-Sabin の曲面を対象として、細分割処理による面の数の増加を抑制する手法を提案した。この結果次のことが明らかになった。

- (1) 本提案手法により、要求された精度内で形状を保ったままで、面数が少ない細分割曲面を生成することができた。
- (2) 本提案手法は、より平面に近い領域が多いほど効果があり、より分割回数が多くて面が小さく滑らかな形状ほど効果があることがわかった。

参考文献

- 1) G. M. Chaikin : An Algorithm for High-Speed Curve Generation, Computer Graphics and Image Processing, Vol.3, pp. 346-349. (1974)
- 2) E. Catmull and J. Clark : Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes, Computer Aided Design, Vol.10, No.6, pp. 350-355. (1978)
- 3) D. Doo and M. Sabin : Behaviour of recursive division surfaces near extraordinary points, Computer Aided Design, Vol.10, No. 6, pp. 356-360. (1978)
- 4) A. H. Nasri : Polyhedral Subdivision Methods for Free-Form Surfaces, ACM Transaction on Graphics, Vol.6, No.1, pp. 29-73. (1987)
- 5) T. A. Funkhouser and C. H. Sequin : Adaptive Display Algorithm for Interactive Frame Rates During Visualization of Complex Virtual Environments, Computer Graphics Proceedings, SIGGRAPH' 1993, pp. 247-254. (1993)

●1999年1月27日受付

みうら たかひろ

1975年生まれ。1997年埼玉大学工学部情報工学科卒。1999年同大学院理工学研究科博士前期課程修了。現在、ソフトウェア開発に従事。

ジョ ソウ

1963年、中国生まれ。1996年埼玉大学大学院理工学研究科博士前期課程修了。現在、同大学院博士後期課程在学中。コンピュータグラフィックス、形状モデリングの研究に従事。情報処理学会の会員。

こんどう くにお

埼玉大学工学部情報システム工学科助教授。

1954年生まれ。1979年名古屋工業大学第2部機械工学科卒。名古屋大学教養部国文学教室。1988年東京工芸大学電子工学科講師を経て1989年より現職。コンピュータグラフィックス、ユーザインタフェース、形状モデリング、感性と知識をもとにした画像処理の研究に従事。工学博士。情報処理学会、日本図学会などの会員。