無限連鎖定理に関する考察

On some theorems with infinite chain

蛭子井 博孝 Hiroataka Ebisui

概要

古典幾何学の中には、三角形や四角形を用いた共線定理や共点定理などが沢山ある。そのなかで、その定理の構造を保ちながら、それを構成する直線の数を増していったり、三角形を、四角形、五角形と拡張していても成立する定理が、数少ないがある。これらは、その数的拡張が無限にできるので無限連鎖定理と呼ぶことにする。クリフォード、Griffiths、Coolidgeなどは、外心、重心、九点円、垂心の定理を無限連鎖化している。それに習って、我々は、新しくシムソンの定理と直極点の定理を無限連鎖化した。そして、そのラフな証明を見つけているので、それに触れる。さらに、三角柱の定理と名付けた定理の予想として無限連鎖化を考えた。

さて、これらの図であるが、連鎖を多くすると、要素の数が2の n 乗のオーダーで複雑になるが、定理3から5の3つの定理については、対称性を利用して、連鎖5、7の場合を描いた。その際、数式処理ソフトのMAPLE Vを用いた。また、外心の連鎖とその他の3つの定理に関しては、CADでその図を描いた。これらの定理と図が、図形科学の発展の一助となれば幸いである。

キーワード：無限連鎖定理／クリフォード／直極点／9点円／シムソン線／CAD

Abstract

In Euclidean Geometry, there are some theorems that have infinite chain. We call those theorem as Mugen-rensa Theorem. Cliford, Gliffith, Coolidge, etc. found such theorems. These infinite chains are derived from circumcenter, barycentre, orthocenter, and nine-point circle. Now We find new four Mugen-rensa theorems those are derived from circumcenter, simson line, orthopole, and triangular prism. We owe our finding new theorems to CAD. And, we draw figures using CAD and Maple V.

Keywords : infinite chain / Cliford / nine-point circle / orthocenter / Simson line / CAD

1. はじめに

古典幾何の中で、奥深い共点定理として、クリフォードの定理があることを、30年足らず前に知った。それが、無限に続く定理であり、証明を読んだが難しく、コンパスと定規で作図して確かめたくなった。そして、5本の直線による連鎖を確かめるのが、精一杯であった。その後、コンピュータが発達し、ハードばかりでなく、ソフトも発達し、パソコン上で、CADが使えるようになった。CADのツールボタンもカスタマイズでき、ポイントサーチも、交点ばかりでなく、円の中心をサーチしてくれるようになった。さらに、外接円も3点をクリックするだけで描け、垂線も簡単に引けるようになったことは、いうに及ばない。このようなCADの作図例題として、古典幾何の共点定理が、いい例題になることが解ってきた。それは、CADの拡大機能により、共点を、4桁から5桁の相対精度で確かめられるからである。任意に引いた3直線の交点を作る三角形において、3頂点から対辺に引いた、3垂線が一点で交わることは、垂心の定理として成立する。それが真であるから、10000倍に拡大しても1点になるが、これは、科学技術の検証になるのである。このような中で、さらに複雑な、以下のような無限連鎖定理を正確に作図することは、CADの性能を確信し、同時に定理の成立を確信することである。さらに、昨今の数式処理、関数グラフィックソフトにより、定理の中に規則性を見いだし、プロットし、図形化し、CADによる作図と比較することは、定理によるコンピュータ技術の検証になる。実際、2-4節の図は、定理の帰納的証明をプログラム化して自動作画したもので、CADによる作図した図とその構造の同一性が確認できた。それにより、2-2、2-3節の図に確信が持てた。さらに、その他の図は、CADを用いて連鎖のある図が作図できた。以上、その定理と無限に続く図のはじめの若干の図を報告する。

2. 無限連鎖定理

2-1. 外心の定理の無限連鎖化

2-1-1. Clifford の定理^(1),2)

【定理1】平面上の4本の直線の内3本ずつの直線が作る4個の三角形の外接円は、1点で交わる。この交点をこの4直線のウォーレス点という。

平面上の5本の直線の4本ずつの直線のウォーレス点五つは、同一円周上にある。この円を5直線のミケル円と名づけ、C12345で表すことにする。[図1]これは、図1-Xすべてを参照の意味、以下同様。次に平面上に6つの直線1, 2, 3, 4, 5, 6をとりそのうち5つずつの直線のミケル円C23456, C13456, C12456, C12356, C12346, C12345をつくればこれら6つの円は、1点で交わる。その交点をP123456で表す。さらに平面上の7つの直線1, 2, 3, 4, 5, 6, 7を取りそのうち6つずつの直線からP234567, P134567, P124567, P123567, P123467, P123457, P123456なる7点を作ればその7点は、同一円周上にある。このように、定理は、共点、共円(4点以上が、同一円周上にあること)を無限に繰り返す。

2-1-2. 外心の無限連鎖化(予想)

【定理2】任意の異なる4直線の内1本を除いた3直線が作る三角形の4つの外接円の中心は、同一円周上Gにある。次に、5直線の内、1本を除いた4直線が作る5つの円 G_i ($i=1, 2, 3, 4, 5$)の中心は、また同一円周上Hにある。さらに、6直線の内、1本を除いた5直線が作る6つの円 H_j ($j=1, 2, 3, 4, 5, 6$)の中心は、また同一円周上にある。このように、定理は、円の中心が、共円であり、その円の中心も共円になることを無限に繰り返す。[図2]

「証明」4直線の場合、図2-1におけるようにウォーレス点を通る4つの外接円の共通弦の垂直2等分線〔破線〕の交点が交わってできる4点は、それぞれ、外

接円の中心であり、角丸aが、仮定から等しいことより、円周角の定理によって同一円周上にある。

図1-2 Cliffordの定理 連鎖7

図2-1 外心 連鎖4

図1-1 Cliffordの定理 連鎖5

図2-2 外心 連鎖5

2-2. 重心の定理の無限連鎖化

Griffiths により岩田至康編；幾何学大辞典 4 [1312] にあるように、重心が、次のように無限連鎖化されている。

【定理 3】四角形 ABCD が円に内接すれば、1 頂点ずつ省いた 4 つの三角形の重心の作る四角形もまた円に内接する。この円の中心を K とする。円に内接する五角形 ABCDE に対し、1 頂点ずつ省いた四角形の上記の円を K_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) とすれば、 K_i はまた同一円周上にある。このように、定理は、円の中心が共円となり、その共円の中心がまた共円となることを無限に繰り返す。[図 3]

「証明」2-4 節の略証の定数 $1/2$ を $1/3$ にして考えればよい

2-3. 垂心の無限連鎖化

これは、文献 3 に載っているものである。

【定理 4】四角形 ABCD が円に内接すれば、1 頂点ずつ省いた 4 つの三角形の垂心の作る四角形もまた円に内接する。この円の中心を K とする。円に内接する五角形 ABCDE に対し、1 頂点ずつ省いた四角形の上記の円を K_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) とすれば、 K_i はまた同一円周上にある。このように、定理は、円の中心が共円となり、その共円の中心がまた共円となることを無限に繰り返す。[図 4]

「証明」2-4 節の略証の定数 $1/2$ を 1 にして考えればよい

2-4. 九点円の無限連鎖化

【定理 5】—Coolidge の定理²⁾—

円周上に異なる 4 点を取り、そのうちの 3 点を頂点とする三角形の九点円（三辺の中点を通る円）は、4 個あるが、それらの円は、1 点（この点を九点円点ということにする。）で交わる。さらに、円周上に異なる 5 点を取り、そのうちの 4 点からできる上の九点円点は、5 個できるが、これらは、同一円周上にある。

この円を二次の九点円ということにする。さらに、円周上に 6 点を取ったとき、そのうちの 5 点からできる上の二次の九点円は 6 個できるが、それらは、1 点で交わる。以下円周上に 7 点、8 点、と数を増やすと、共円、共点を繰り返し、このことが、定理は、無限に繰り返す。[図 5]

「証明」—略証—

原点を中心、半径 1 の円周上の n 個の点の位置ベクトルを x_i ($1 \leq i \leq n$) とすれば、

$$|(1/2)\Sigma x_i - (1/2)\Sigma^k x_k| = 1/2$$

Σ^k は、 n 個のうち任意の $n-1$ 個取った和
 $\therefore n$ 個の点 $x_j = (1/2)\Sigma^k x_k$ は、点 $x_n = (1/2)\Sigma x_i$ を中心に半径 $1/2$ の円周上にある。

逆に点 $x_j = (1/2)\Sigma^k x_k$ を中心とし半径 $1/2$ の円周は、1 点 $x_n = (1/2)\Sigma x_i$ で交わる。

これを $n = 3$ から考えていくとよい。

2-5. 直極点^{2), 4), 5)}の無限連鎖化—（予想）

この定理は、連鎖 4 までしか証明してなく、無限連鎖は、予想である。

【定理 6】一本の定直線 g と一般の位置の 3 本の直線を与えたとき、次のように、直極点が、さだまる。すな

図 3-0 重心 連鎖 4

図 4-0 垂心 連鎖 4

図 5-0 九点円 連鎖 4

図3-1 重心 連鎖5

図3-2 重心 連鎖7

図4-1 垂心 連鎖5

図4-2 垂心 連鎖7

図5-1 9点円 連鎖5

図5-2 9点円 連鎖7

わち、3本の直線の2本の交点からできる $\triangle ABC$ の頂点から、定直線 g へ垂線を下し、その垂線の足を点 A' 、 B' 、 C' とする。これらの3点から、2本を選んだ残りの直線へ垂線を下すと、3本の直線ができるが、これらは、1点で交わる。この点を $\triangle ABC$ に関する（または、3直線に関する）直線 g の直極点という。

さて、一般の位置にある直線を1本増やし4本にする。すると、4本から3本を任意に選ぶ毎に、その三角形に関する直線 g の直極点が、定まる。これらは、4点あり、同一直線上にある。さて、この4点より、直線 g に垂線を下し、その足より、3本を選んだ残りの1本に垂線を下す。すると、この4本の直線は、1点で交わる。この点を4直線のつくる完全四辺形に関する直線 g の直極点という。さらに、5本、6本、7本、...、 n 本、と直線を増やし、一般に、 n 直線のつくる完全 n 辺形に関する直線 g の直極点を定義できる。これを直極点の無限連鎖化という。

〔四直線の場合の証明〕 図6—3参照

「補題」直線 g と異なる四直線 m_1, m_2, m_3, m_4 が与えられたとき、四直線 m_1, m_2, m_3, m_4 の一直線を除いた残りの3本からできる4つの三角形の直線 g に関する直極点 Q^1, Q^2, Q^3, Q^4 は、同一直線上にある⁵⁾。

「証明」直線 m_1 と m_2 の交点を U^3 、直線 m_2 と m_3 の交点を U^1 、直線 m_3 と m_1 の交点を U^2 、直線 m_1 と m_4 の交点を U^4 、直線 m_2 と m_4 の交点を U^5 、直線 m_3 と m_4 の交点を U^6 とする。

点を $U^1, U^2, U^3, U^4, U^5, U^6$ から直線 g へ下した垂線の足を、それぞれ点下付き文字 $U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6$ とする。すると、直極点の定義より $U_1Q^1 \parallel U_3Q^2$ （ $\because$ ともに m_1 に垂直）、 $U_3Q^1 \parallel U_5Q^4$ 、 $U_1Q^1 \parallel U_5Q^2$ 、ゆえに、6点 $Q^1, Q^2, Q^3, U_1, U_3, U_5$ におけるパップスの定理（2直線上に、それぞれ、 A, B, C 、と X, Y, Z があったとき、 $AX \parallel CZ, AY \parallel BZ$ ならば $BX \parallel CY$ の系：一直線上に A, B, C があり $AX \parallel CZ, AY \parallel BZ, BX \parallel CY$ ならば、 X, Y, Z は、同一直線上にある。）より

3点 Q^1, Q^2, Q^3 は同一直線上にある。... (1)

図6—1 パップスの定理

図6—2 直極点の定義 連鎖3

図6—3 直極点 連鎖4

図6—4 直極点 連鎖5

同様に、直極点の定義と6点 $Q^1, Q^4, Q^3, U_1, U_2, U_6$ において $U_1Q^1 \parallel U_6Q^3, U_1Q^4 \parallel U_2Q^3$

$U_2Q^1 \parallel U_6Q^4$ だからパプスの定理より

3点 Q^1, Q^4, Q^3 は同一直線上にある. . . (2)

(1), (2)より $\therefore$ 点 Q^1, Q^2, Q^3, Q^4 は、同一直線上にある.

【定理】点 Q^1, Q^2, Q^3, Q^4 より直線 g に下した垂線の足を点 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 とする. すると、点 Q_1 より直線 m_1 に下した垂線と、点 Q_2 より直線 m_3 に下した垂線と点 Q_3 より直線 m_2 に下した垂線と、点 Q_4 より直線 m_1 に下した垂線とは、一点 S で交わる.

「証明」いま、5点 Q^1, Q^2, Q_1, U_3, Q_2 より定義を用いてできる6点 $Q^1, S, Q^2, Q_1, U_3, Q_2$ と5点 Q^1, Q^3, Q_1, U_2, Q^3 より定義を用いてできる6点 $Q^1, S', Q^3, Q_1, U_2, Q_3$ のうち直極点が2点 S, S' とする. これが一致すればよい. 今、6点におけるパプスの定理より、それぞれ3点 Q^1, S, Q^2 および3点 Q^1, S', Q^3 は同一直線上にある. また、それぞれの6点において次の3組の平行線の関係を満たす.

この2つの図形より $Q_1S \parallel U_3Q^2$

$Q_1S' \parallel U_2Q^3$ であり、定義より $U_3Q^2 \parallel U_2Q^3$

ゆえに、 $Q_1S \parallel Q_1S'$ 補題より Q^1, Q^2, Q^3 は共線、ゆえに点 S, S' は一致し、ただ一点である.

2-6. シムソンの定理^{(2), (4), (5)} の無限連鎖化

【定理7】円周上に、1定点と3点を取る. この3点からできる円の内接三角形の各辺または、その延長線上に、1定点から垂線を下す. すると、その3つの垂線の足は、同一直線上にある. この直線を三角形のシムソン線という. [図7]

円周上に、1定点と4点をとる. その4点のうち3点からできる三角形のシムソン線は、3点の取り方が ${}_3C_3$ の4通りあるので、4本できる. この4本の三角形のシムソン線に1定点より垂線を下す. このとき、4つの垂線の足は、やはり同一直線上にある.

これを、四点のつくる四角形のシムソン線という.

円周上に、1定点と5点をとる. その5点のうち4点

からできる四角形のシムソン線は、4点の取り方が ${}_4C_4$ の5通りあるので、5本できる. この5本の四角形のシムソン線に1定点より垂線を下す. このとき、5つの垂線の足は、やはり同一直線上にある.

これを、5点のつくる五角形のシムソン線という.

以下、6点、7点、8点、. . . , n 点を取ると、 n 角形のシムソン線ができる. これをシムソン線の無限連鎖化ということにする.

「証明」これは、帰納法的図7による略証を考える. つまり、三角形四角形のシムソン線の成立を仮定している. 五角形があったとき、三角形の辺 k があり、辺 k を用いた三角形のシムソン線には、 P から k に下した垂線の足 K を通る、3つのシムソン線 l_1, l_2, l_3 がある. そして、四角形のシムソン線には、 l_1, l_2, l_3 に下した垂線の足 L_1, L_2, L_3 から2点を選んで結んだ直線 $L_1L_2 = m_{12}, L_2L_3 = m_{23}, L_1L_3 = m_{13}$ がある. そして、五角形のシムソン線は、当然 m_{12}, m_{23}, m_{13} に下した垂線の足、 M_3, M_1, M_2 を通るものである.

ところで、三角形 $L_1L_2L_3$ は、 PK を直径とする円周上にある. ゆえに、 $\triangle L_1L_2L_3$ に関する P のシムソン線が、五角形のシムソン線となり、ただ一つ定まる.

図7-1 シムソン線

図7-2 シムソン線 連鎖5の証明

図7-3 シムソン線 連鎖5

図8-1 三角柱の定理

2-7. 三角柱の定理^⑧の無限連鎖化（予想）

【定理8】図8は、三角柱の定理と呼ぶことにした定理である。Pを頂点とする三角錐を、底面とは別な平面で切断し、その3つの側面の四角形の対角点と、底面ないし上面の三角形の頂点の対応する点を結ぶと共点になる。〔図8〕

さて、定理を無限連鎖化する。

1点Pを通る3直線上に、2点ずつ取り、1本を除いた残りの2本の4点をたすきに結ぶ。その交点と1本目のPに近いほうの点とを結ぶ直線は3本ある。これらは共点である。この点を3点中心と呼ぶことにする。次に1点Pを通る4直線上に2点ずつ取る。次に、1本を除いた残りの3直線からできる3点中心と選んだ1本の上のPに近い方の点とを結ぶ。この直線は4本あり、共点となる。この点を4点中心と呼ぶ。同様に、1点Pを通る5直線上に2点ずつ取る。次に、1本を除いた4直線の4点中心と、選んだ1本の点を結び5点中心ができる。以下6本、7本の直線について無限連鎖する。

なお、P点より遠い方の点を選んでも別な共点が求まる。

この証明については、3点中心の物しか厳密な物が見つかっていない。図は、5点中心が見えるようにするため、三角柱の上面と底面を同一円周上に描き平行線で結んだ。ただし、4点中心5つの内3つで5点中心を求め、CADによる拡大作図で共点性を確かめている。

図8-2 三角柱の定理 連鎖4

図8-3 三角柱の定理 連鎖5

3. 考察

以上、無限連鎖定理について、8個の例を考えたが、2節では、定理の定義と証明が主だったので、ここでは、定理1から順に簡単な説明と考察を行う。

【定理1】は、クリフォードの定理で、その証明も成されている。この定理は、連鎖が、大きくなると、一般の位置での作図が困難であり、見た目にも美しくない。それで今回の表現のように対称性を取り入れ、正五角形の辺を5直線としたり、正七角形の7辺を7直線とした。

【定理2】は、新しく考えた外心の連鎖の定理で、CADにより連鎖5まで、成立を確かめている。しかし、証明は、連鎖4までで、さらに考察する必要がある。

【定理3】は、重心の連鎖で、単純に定義でき、一般の位置でのn点について成り立つが、その位置を乱数的に取ると7点ぐらいの連鎖で、図が見にくくなる。また、連鎖5、連鎖7におけるように正多角形による対称性を考慮したものでも、九、十角形ぐらいになると、円が重なり、ZOOMでないと詳細は見えない。はじめの円の半径の1/3の半径の円が連鎖する。連鎖7では、 ${}_7C_7$, ${}_7C_6$, ${}_7C_5$, ${}_7C_4$ 個ずつの円が連鎖する。

【定理4】は、垂心の連鎖の定理で、定理3と同じように、はじめの円と同じ半径1の円が連鎖する。図は、連鎖4では、一般の円に内接する四角形としたが、連鎖5、7では、対称性を考慮して、円に内接する正多角形によるものを考えた。

【定理5】は、九点円の連鎖であり、多角形を作った、はじめの円の半径の1/2の半径の円が連鎖する。図は、「定理4」と同じ考えで描いた。定理3、4、5は、同じ構造を持つが、九点円の円の連鎖は、円、点、円、点と1つおきの連鎖である。つまり、連鎖7では、円を ${}_7C_7$, ${}_7C_5$, ${}_7C_3$ 個描いている。

【定理6】は、直極点の定理の無限連鎖で、証明は、連鎖4についてであり、予想と呼ぶべきかも知らない。しかし、作図を連鎖5までしてみると、連鎖の成立が、確実に思えてきたので、証明すべきことは、承知であるが、あえて予想の段階で、ここに報告させてもらった。なお「図6、7、8」の図中の丸3、4、5は、連鎖3、連鎖4、連鎖5の共点、共線を指している。

【定理7】は、シムソン線の無限連鎖で、これは、連鎖5まで証明した。この証明方法は、帰納的であり、連鎖6にも当てはまるであろう。しかし、より厳密な形式の証明が、この定理にも必要であろう。

【定理8】は、連鎖の証明ができておらず、全くの予想であるが、その作図からは、確実に、定理として成立す

ることが予想される。その作図は、直線の交差が複雑で、今回の形式にして、図で初めて連鎖5まで作図できた。そして、共点性を拡大機能で確かめた。

以上、8つの無限連鎖定理について考えたが、予想の段階で、報告するのも、自分で証明していたら、いつになるか解らず、みなさんに、考えてもらえれば、より早く、定理として確固あるものになると思うからである。

また、図に関しては、共点性、共円性は、十分確かめている。ということで、ここでの定理の図的表現や考察が、無限連鎖定理の総合的研究につながり、図形科学の発展の一助となれば幸いである。

参考文献

- 1) 窪田忠彦、『初等幾何学特論』、共立社、(1940)。
- 2) 岩田至康編、『幾何学大辞典4』、横書店、(1987)。
- 3) 森本清吾、『初等幾何学』、朝倉書店、(1955)、63-64。
- 4) 清宮俊雄、『初等幾何学』、裳華房、(1972)。
- 5) 長友治郎吉、『幾何学』、東京教学社、(1969)、123。
- 6) 奥村 博、「蛭子井氏の定理と(154, 203)コンフィグレーション」、『図学研究』、82、(1998)、25-28。
- 7) 図脳 RAPIDPRO、『マニュアル』、フォトロン。
- 8) Maple V、『マニュアル』、Materloo Maple Inc。

●1999年8月26日受付

えびすい ひろたか

1950年生 阪大応用物理修了後、高校数学教師、SE

現在 Free 卵形線、卵形面を研究中

論文賞(デカルトの卵形線の一連の研究)