折紙に対するランダムな 1 回の折りによって現れる多角形の出現比率の検証

三谷 純 Jun MITANI

概要: 正方形の折紙を 1 回だけ折って開くと、正方形を横切る直線が 1 本現れる。この直線によって正方形は二つの多角形に分割される。直線が四隅の頂点を通る特殊なケースを除くと、この二つの多角形は四角形と四角形、または、三角形と五角形のどちらかの組み合わせとなる。折紙をランダムに 1 回折った場合に、それぞれの多角形の組み合わせの出現する比率はいくつであるだろうか。この問題を数学的解法で求め、出現比率が 1 対 $\sqrt{2}$ であるとの結果を得た。また、コンピュータを用いた数値解の算出によって結果の妥当性を検証した。

キーワード: 平面幾何学／折紙

1. はじめに

正方形の折紙を 1 回だけ折って開くと、正方形を横切る直線が 1 本現れる。この直線によって正方形は二つの多角形に分割される。直線が四隅の頂点を通る特殊なケースを除くと、この二つの多角形は四角形と四角形、または、三角形と五角形のどちらかの組み合わせとなる(以降では、簡単のためにそれぞれを(4,4)分割、および(3,5)分割と記すこととする)。本稿では、以下の問いに対する解を求めることを目的とする。

問い: 正方形の紙をランダムに 1 回折って開いた時、(4,4)分割と(3,5)分割の出現する比率はいくつである。

2. ランダムな点の配置による多角形の出現比

芳賀は文献[1][2][3]において前述の「問い」と類似した以下のような考察を紹介している。

平面上に折紙を配置し、1 つの頂点を手前に折り返した時に、どのような多角形が手前側に生じるか検証する。図 1(文献[1]より引用)は、右下頂点を様々に折り返した様子を示し、a,b,c は三角形、d,e,f は四角形が生じている。図 2(文献[1]より引用)は五角形が生じる例である。芳賀は、図 3(文献[1]より引用)に示すように、ランダムに点を配置し、その点に折紙の右下頂点が重なるように折ることで、何角形ができるかを調べ、結果として図 4(文献[1]より引用)領域に対応する多角形名の文字は本稿で加筆)に示すような点の位置と生じる多角形の分布図を得ている。折紙の 1 辺の長さを 1 としたときの、それぞれの領域の面積は、計算によって以下のように求められている。

三角形領域の面積 = $\frac{\pi}{2} - 1$ (=0.5708)

四角形領域の面積 = π (=3.1416)

五角形領域の面積 = $\frac{\pi}{2} + 3$ (=4.5708)

全領域合計の面積 = $2\pi + 2$ (=8.2832)

図 1. 右下頂点を折り返した様子。a,b,c は三角形、d,e,f は四角形が生成される(文献[1]より引用)。

図 2. 右下頂点を折り返して五角形が生成されるケース(文献[1]より引用)。

図 3. ランダムに点を描いて、その点に右下頂点を重ねて折る(文献[1]より引用)。

図 4. 頂点の移動先と多角形の種類の分布図(文献[1]より引用。多角形名は後から加筆)。

このような検証に問題はないが、文献[1][2][3]では、ここで得られた多角形の種類の分布図の面積比が、折紙

をランダムに折った時(「任意に1回折ってもらったとき(文献[1]より)」)に出現する多角形の比率と一致するであろうという前提で考証している点に問題がある。ランダムに折紙を折った時に出現する多角形の比率と、上記で述べた分布図の面積の比率とは直接的な関係がないと考えられるからである。例えば、図2に示す五角形が現れる折り方の裏と表を反転させれば、三角形になるわけであるから、裏と表の区別をしなければ三角形と五角形の出現比率は等しくなるべきだと考えられる。また、図5に示すように、三角形になるケースでは移動後の頂点が折り線に近く、折り線が少し振れると頂点は少し動く。一方で五角形になるケースでは頂点が折り線から遠く、折り線が少し振れただけでも頂点の移動量は大きい。このような理由から、五角形領域の面積が三角形領域の面積よりも大幅に大きくなっているのではないかと考えられる。実験では約3分の2の被験者が三角形となったと記しており、この値は全領域に占める三角形領域の面積率(6.89%)と大きく異なる。

図5 三角形になるケース(左)よりも五角形になるケース(右)の方が、折り線が振れた場合の頂点の移動量が大きい。

3. ベルトランのパラドックス

そもそも、幾何的な性質に関して確率の議論をすることは難しい。ベルトランのパラドックスと呼ばれる有名な問いがある。ここでは、Wikipedia[4]およびWebサイト[5]にて紹介されているベルトランのパラドックスについて紹介する。この問題は以下のとおりである。

ベルトランのパラドックス問題(文献[5])
与えられた円に交わる直線を引くとき、その円に内接する正三角形の1辺の長さよりも長くなる確率はいくらか。

この問は、異なる考え方によって異なる解が得られる。文献[5]に記載されている解を以下に2通り紹介する。

(1) 直線が円と交わった2点のうち片方をAとし、Aを頂点とする円の内接正三角形の残りの頂点をB、Cとする。このとき、直線と円のもう一方の交点が円弧BCの間にある時に内接正三角形の1辺より長くなる(図6)。円弧BCは円周の3分の1なので、求める確率は1/3である。

図6 直線と円の交わり(1)。

(2) 円と交わる直線に垂直な半径をABとする。点Aを頂点とする円の内接正三角形の点Aの対辺と直径ABとの交点をPとする。また、点Bを頂点とする円の内接正三角形の点Bの対辺と直径ABとの交点をQとする。円と交わる直線との交点をXとすると、点Xが線分PQに含まれる時に内接正三角形の1辺より長くなる(図7)。線分PQの長さは直径の半分なので、求める確率は1/2である。

図7 直線と円の交わり(2)。

4. ランダムな折り

ベルトランのパラドックスは「ランダムに直線を引くとはどのようなことか」の定義によって解が異なるということを示す例である。どちらが正しい、というのではなく、ランダムな直線の定義が明確であれば、それに対する解は一意に求まる。本稿で対象とする問題も、同じようにランダムな折りを明確に定義する必要がある。

本稿で対象とする「ランダムに折る」のモデル化はWikipedia[4]に記載されているような、以下で考えることとする。

上空からストローを落下させた時に、ストロー(を延長した直線)が折紙を横切る直線を折り筋として折りたたむ。

2章で紹介した芳賀の方法では、「折紙の右下頂点とランダムに配置した点の垂直二等分線を折り筋とする」という方法で折り線を決めたものと言い換えることができる。この方法は、本稿で定義するランダムな折り方と異なるため、結果も異なるものとなる。

5. 数学的解法(1)

5.1 直線のパラメータ化

折紙を図8に示す正方形ABCDとし、折り線を直線1とする。原点から1に降ろした垂線の足をHとするときに、OHの長さをd、およびx軸とOHの成す角を θ とし、この2つを直線1を表現するパラメータに用いる。このような2つのパラメータを用いた直線の表現方法は、画像から直線を抽出するアルゴリズムとして一般的に用いられるHough変換でも用いられる方法である。

図8 d と θ を用いた直線の表現.

5.2. 解法

直線 l によって, 正方形がどのように分割されるかを考える. 対称性より $d > 0$, $0 < \theta \leq \pi/4$ の範囲のみ対象とする. θ を固定して考え, l が点 D を通る時の d の値を d_D , 点 A を通る時の値を d_A とするとき, d の値と分割方法の関係は次のようになる(図9).

$0 < d < d_D$: (4,4)分割

$d_D < d < d_A$: (3,5)分割

図9 d の値による直線 l の位置.

d_A, d_D の値は図10より, 次のようになる.

$$d_A = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$$

$$d_D = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)$$

図10 l が点 A を通る場合(左)と点 D を通る場合(右).

θ を横軸, d を縦軸と取ったとき, それぞれの値による分割方法の関係は図11のようになる. 図中(A)が(3,5)分割, (B)が(4,4)分割の領域であり, (A)の上側の曲線は $d = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$, (B)との境界を成す曲線は $d = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)$ である.

図11 θ, d の値と分割方法の関係.

(A),(B)それぞれの領域を積分で求めると次のようになる.

$$(A) + (B) = \sqrt{2} \int_0^{\pi/4} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) d\theta = 1$$

$$(B) = \sqrt{2} \int_0^{\pi/4} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) d\theta = \sqrt{2} - 1$$

$$(A) = 2 - \sqrt{2}$$

従って,

(3, 5)分割 : (4,4)分割

= (A)の面積 : (B)の面積

= $\sqrt{2} : 1$

6. 数学的解法(2)

x 軸との成す角が θ の直線を平行に移動させることを考える. 対称性から $\pi/4 \leq \theta < \pi/2$ のみ考慮すると, 図12に示すように, 水平な2辺と交わる領域(B)では(4,4)分割となり, 互いに垂直な2辺と交わる領域(A)では(3,5)分割となる. 正方形の1辺を1とすると, それぞれの領域の幅は $\sin \theta - \cos \theta$, $\sin \theta$ となるので, これを θ について積分すると, 次のような比を求めることができる.

$$\begin{aligned} (A) : (B) &= 2 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos \theta d\theta : \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin \theta - \cos \theta) d\theta \\ &= \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) : \sqrt{2} - 1 \\ &= \sqrt{2} : 1 \end{aligned}$$

従って,

(3, 5)分割 : (4,4)分割

= $\sqrt{2} : 1$

である.

図12 頂点の移動先と多角形の種類の分布図.

7. 計算機による検証

ランダムな要素を含む確率の問題に対しては、計算機によるシミュレーションがよく用いられる。そこで、本稿でも計算機を用いたシミュレーションで解を求めたので、その結果を紹介する。まず、一定の微小な間隔を置いて存在する平行直線群(無限長)と正方形の交わり方を調べる(図 13)。平行直線群は一定角度ずつ回転させることとする。これで、平面空間を満たすあらゆる直線を離散的に表現するものとする。ところで、直線群を回転させる代わりに正方形の方を回転させても問題は変わらない(図 14)。こちら方がプログラムの実装が容易なため、正方形を回転させて交わり方を調べる。対称性より回転角は $0 \sim \pi/4$ を調べるものとする。図 15 に示すプログラムを用いた。

図 13 平行な直線群との交わり.

図 14 水平な直線群と、回転させた正方形の交わり.

```
for(int i = 0; i < thetaDivNum; i++) {
    double theta = i*Math.PI / 4.0 / thetaDivNum;
    for(int j = 0; j < 4; j++) {
        corner[j].x = radius * Math.cos(theta);
        corner[j].y = radius * Math.sin(theta);
        theta += Math.PI / 2;
    }
    for(int y = -radius; y <= radius; y++) {
        totalCount++;
        int cnt = 0;
        for(int j = 0; j < 4; j++) {
            if(corner[j].y > y) {
                cnt++;
            }
        }
        switch(cnt) {
            case 0: otherCount++; break;
            case 1: triangleCount++; break;
            case 2: squareCount++; break;
            case 3: triangleCount++; break;
            case 4: otherCount++; break;
        }
    }
}
```

図 15 直線群と正方形の交わりをシミュレートするプログラムコード.

x 軸に水平な直線を $-1 \leq y \leq 1$ の間に 2 万本配置し、正

方形を $0 \sim 45$ 度の間を 10000 分割した回転を行うことで、約 2 億通りの分割実験を行った。

その結果は次のとおりであった。

(3,5)分割:105488527

(4,4)分割:74577604

交差せず:19943869

試行回数:200010000

(3,5)分割/交差した試行回数=0.5858321

(3,5)分割/(4,4)分割=1.4144799690802616

(3,5)分割 : (4,4)分割

= 1.4144..... : 1

$\doteq \sqrt{2} : 1$

6. まとめ

正方形の折紙をランダムに折った時に、その折り線によって分割されて生成される多角形の出現比率を、計算および計算機を用いたシミュレーションで求めた。ランダムな折り方の定義によって、求まる解はことなるが、本稿で用いた定義では、三角形と五角形、四角形と四角形になる場合の比は $\sqrt{2}:1$ であることがわかった。この結果は、文献[1]で記されている「実験で約 3 分の 2 の被験者が三角形となった」という結果に対して、図 4 に示す分布図の面積比を用いる方法よりもよい説明を与えるものと考えられる。

参考文献

- [1] 芳賀和夫, “オリガミクスへの招待 第 1 回”, 季刊誌「をる」No.9, p64-67, 1995.
- [2] 芳賀和夫, “数理を楽しむオリガミクス 6”, 折紙探偵団 72 号, p.14-15, 2002.
- [3] 芳賀和夫, “オリガミクスによる数学授業”, 明治図書出版, 1996.
- [4] Wikipedia,
[http://en.wikipedia.org/wiki/Bertrand%27s_paradox_\(probability\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Bertrand%27s_paradox_(probability))
- [5] 安田 富久一, “数学的活動を大切にする”,
<http://www.nikonet.or.jp/spring/katudou/katudou.htm>

著者紹介

みたに じゅん : 筑波大学システム情報工学研究科コンピュータサイエンス専攻 兼 科学技術振興機構さがけ, 305-8573, 茨城県つくば市天王台 1-1-1