時系列後退データを利用したサンプル時刻微分法

清水 浩

京都大学大学院農学研究科 606-8502 京都市左京区北白川追分町

Numerical Differentiation Based on Sampling Time Using Time Series Sampled Data

Hiroshi SHIMIZU

Graduate School of Agriculture, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan

Abstract

Differential values such as plant growth rate are useful when developing decision-support strategies for controlling environmental conditions and plant growth. A numerical differential formula based on sampling time was developed using sampled time-series data. A smoothing filter combined with a FIR (Finite Impulse Response) filter and AR (Autoregressive) model was used to decrease the excess sensitivity of numerical differentiation. The numerical differential formula was theoretically derived from Taylor series. The proposal method was first applied to an artificial data set generated by a sine curve modified with random noise to verify performance of the proposed method. The results showed that the smoothing filter combined with the FIR filter and the AR model reduced noise such that the calculated result was similar to the original sine curve. The numerical differentiation method combined with the smoothing filter proposed in this paper was also applied to measured data of chrysanthemum stem elongation. Results showed that the proposed method acceptably calculated plant growth rate.

緒 言

植物工場などにおいて環境条件をコントロールすることによって植物の成長を制御する場合には、制御のための判断材料として現時点(サンプル時刻)における植物の成長速度、つまり成長量の時系列のデータの微分値を用いるのが有効である¹⁾。時系列データ微分法としては数値計算などで用いられる微分公式や多項式適合による微分法などがある。数値微分公式はノイズに非常に敏感であり、一方多項式適合法は多項式の次数やデータに対する適合範囲の選択などの決定に客観的基準が明確でなく、またデータの平滑化効果における周波数特性の操作が容易でないなど、すぐには適用することが難しい。

そこで、時系列データのサンプル時刻における微分値が、過去の時系列データとの畳み込みによって簡便に求め

ることができる微分フィルタを開発したので報告する。

サンプル時刻における微分法

まず、時系列データが $f(t)$ という関数のサンプル値データであるとする。いま求めたいのはサンプル時刻 $t = n$ でこの関数の微分値を $t < n$ のデータを用いて計算することであるので、(1)式のような線形結合を考える。

$$f_{\text{deriv}}(n) = \sum_{i=0}^k w_i \cdot f(n-i) \quad (1)$$

続いて(1)式を $f(n)$ およびそれらの高階導関数で表すためにテーラー展開を行う。

時系列データのサンプリング間隔を h とすると、

$$\begin{aligned} f(n-i) &= f(n+(-ih)) \\ &= f(n) + \frac{f'(n)}{1!} \cdot (-ih) \\ &\quad + \frac{f''(n)}{2!} \cdot (-ih)^2 + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

1998年 2月20日受付

1998年 3月23日受理

Fig. 1 Characteristics in frequency domain of differentiation filter

となる。(2)式を(1)式に代入して導関数ごとに整理すると、

$$\begin{aligned}
 f_{\text{deriv}}(n) = & (w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_k) \cdot f(n) \\
 & + ((-1)^1 w_1 + (-2)^1 w_2 + \dots \\
 & + (-k)^1 w_k) \cdot f'(n) - \frac{h}{1!} \\
 & + ((-1)^2 w_1 + (-2)^2 w_2 + \dots \\
 & + (-k)^2 w_k) \cdot f''(n) - \frac{h^2}{2!} \\
 & \vdots
 \end{aligned} \quad (3)$$

となる。したがって(3)式の右辺が $f(n)$ の1階導関数となるための $w_0, w_1, \dots, w_k$ の条件は、左右辺の比較から

$$W = B^{-1} \cdot A \quad (4)$$

ただし、

$$\begin{aligned}
 W &= \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_k \end{bmatrix} \\
 B &= \begin{bmatrix} 1 & (-1)^0 & (-2)^0 & \dots & (-i)^0 \\ 0 & (-1)^1 & (-2)^1 & \dots & (-i)^1 \\ 0 & (-1)^2 & (-2)^2 & \dots & (-i)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} \\
 A &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1/h \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

となる。ここで k をどれくらいとればよいかという問題がある。そこで k の値と周波数特性との関係を調べたものをFig. 1に示す。Fig. 1から周波数特性への係数 w の項数 k の影響は少ないので計算が簡便な項数を選択すればよい。しかしながらこの方法による微分値の計算は雑音に弱いため、この処理を施す前に時系列データの平滑化など雑音除去操作をする必要がある。

平滑化フィルタ

上述の微分法の前処理として採用する平滑化アルゴリズムの条件としては、(1)サンプル時刻より過去のデータを利用すること、(2)平滑化によって位相遅れが発生しないことである。時系列データを平滑化するためのフィルタは数多く提案されているが、(1)の条件を満たす平滑化手法のひとつとして指数平滑化²⁾が挙げられる。この平滑化法はひとつのパラメータ ρ で遮断周波数を調整するが、同時に ρ によって位相特性も変化する。Fig. 2に示すように ρ が大きくなるほど遮断周波数が低くなるが位相遅れも大きくなる。そこで(2)の条件も満足するため、位相の遅れた時系列データに対して、これを逆向きにして再度処理すれば位相が元にもどることを利用することが考えられるが、サンプル時刻より未来のデータが必要となる。

このように本来サンプル時刻より過去のデータで平滑化を行う指数平滑化法を用いても、位相のズレなどを考慮すると未来のデータを用いなければならない。いずれにしても未来のデータを予測して用いるのであれば、FIRフィルタなど設計手法が確立されている平滑化法を用いた方が位相の遅れや遮断周波数の設計に自由度がある。そこで平滑化法にはFIRフィルタ³⁾、データ予測法にはARモデル²⁾を採用し、これらを組合わせたものを上述の微分法の前処理に用いた。FIRフィルタにはフーリエ級数と窓関数を利用した設計法を採用し、ARモデル同定にはオフライン最小二乗法により行った。ARモデルによる予測精度は遅れ時間が大きくなるほど悪くなるのでサンプル時刻より2サンプル未来までの予測としFIRフィルタのフィルタ長は5とした。また、ARモデル次数はAIC(赤池情報量規準)が最小になるように決定した。FIRフィルタは(5)式に示すように時系列データの線形和であり、フィルタ出力値は入力データの中央値と対応している。

$$f_{\text{smooth}}(n) = H \cdot C \cdot X \quad (5)$$

ただし、

$$H = [h_1 h_2 h_3 h_4 h_5]$$

$$C =$$

$$\begin{bmatrix} ar_{20} & ar_{21} & ar_{22} & ar_{23} & \dots & ar_{2i} & \dots & ar_{2j} \\ ar_{10} & ar_{11} & ar_{12} & ar_{13} & \dots & ar_{1i} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Fig. 2 Relationship between ρ and characteristics in frequency domain of exponential smoothing

Fig. 3 Numerical differentiation by Eq(6)

$$X = \begin{bmatrix} f(n) \\ f(n-1) \\ \vdots \\ f(n-j) \end{bmatrix}$$

ただし、 $i < j$ となる。

H ベクトルの要素は FIR フィルタの係数であり、 C 行列の 1, 2 行の要素はそれぞれ 1 段先予測および 2 段先予測の AR モデルの係数である。一般に i と j は等しくない。ここでは $i < j$ の場合を示した。

時系列後退データを利用したサンプル時刻微分法

ここまで述べてきたサンプル時刻微分法とその前処理としての平滑化フィルタを組合わせたフィルタは (6) 式のようなになる。ここでは微分法の w ベクトルの長さは 3 としたので B 行列 3×3 である。これは Fig. 1 に示すようにこのベクトル長による周波数特性などへの影響がないことからできるだけ簡便なフィルタを構築するためである。また、 H ベクトルは対象となるデータに対する遮断周波数に依存し、 C 行列は対象データへの AR モデルなので、それぞれ一般的な値というのではなく、対象ごとに最適なものを選定しなければならない。

$$f_{\text{deriv}}(n) = H \cdot C \cdot X \cdot B^{-1} \cdot A \quad (6)$$

ただし、

$$X = \begin{bmatrix} f_n & f_{n-1} & f_{n-2} \\ f_{n-1} & f_{n-2} & f_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{n-4} & f_{n-5} & f_{n-6} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & (-1)^0 & (-2)^0 \\ 0 & (-1)^1 & (-2)^1 \\ 0 & (-1)^2 & (-2)^2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/h \\ 0 \end{bmatrix}$$

この微分法を検証するため、サインカーブに乱数を重畳させた疑似的な時系列データを (6) 式に適用した結果を Fig. 3 に示す。この結果を得るための具体的な手続きは、 A, B, C, H の行列およびベクトルの値を先験的な情報により前もって求め、時系列データの一部を X ベクトルに代入し畳み込みを行うだけであり、計算の手続きは大変簡便である。ここで用いた各行列は B, A は上記の通りでありその他の行列の要素は次の通りである。 C ベクトルの第 1 行の次数は AIC が最小になる 8 次とした。第 2 行についても同様の手続きをしたところ 8 次となった。

$$H = [0.1056 \quad 0.2417 \quad 0.3054 \quad 0.2417 \quad 0.1056]^t$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -0.276 & -0.2971 \\ 0 & 1 & 0 & -0.1318 & -0.1165 \\ 1 & 0 & 0 & -0.006 & -0.04 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0087 & 0.017 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2074 & 0.2349 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3159 & 0.3304 \\ 0 & 0 & 0 & 0.306 & 0.2921 \\ 0 & 0 & 0 & 0.471 & 0.4555 \end{bmatrix}^t$$

図 3 において計算結果は入力データの微分値をノイズに埋められることなく計算しており、全体としてコサイン

Fig. 4 Sample data of plant elongation

カーブに近い形状になっている。ノイズに対する感度は H ベクトルの値、つまり FIR フィルタの設計値に依存しておりこの値を適宜調節することによって目的とする誤差の範囲内に微分値を納めることが可能となる。

植物成長データへの適用例

次に実際の植物成長データを対象にサンプル時刻における成長速度を求めてみる。供試の成長データは画像計測システム⁴⁾によってグロースチャンバ内で10分毎に計測した *Chrysanthemum paludosum* の三次元伸長成長量である。これを Fig. 4 に示す。Fig. 4 より光条件が暗期から明期になると伸長成長量が增大しているのが認められる。このような時系列データに対してサンプル時刻微分を適用した。まず先験的な情報より FIR フィルタの遮断周波数を決定して H ベクトルの要素および AR モデルを決めておく。ここで用いた各行列は C 行列以外は前項と同じである。また、 C 行列は次の通りである。 C ベクトルの第1行、2行については前説と同様に AIC が最小になる次数を求めたところいずれも14次となった。

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -0.1174 & -0.1175 \\ 0 & 1 & 0 & -0.0311 & -0.0086 \\ 1 & 0 & 0 & -0.0086 & -0.0092 \\ 0 & 0 & 0 & 0.004 & 0.0045 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0617 & -0.061 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0079 & -0.0084 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1194 & 0.1198 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0386 & 0.0398 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0453 & 0.045 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1401 & 0.1393 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0594 & 0.059 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0308 & 0.0316 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3587 & 0.3583 \\ 0 & 0 & 0 & 0.432 & 0.4316 \end{bmatrix}$$

Fig. 5 に得られた結果を示す。同図には本稿で提案した方法によって得られた結果の他に数値微分だけを施したものを併記した。提案した方法では光条件の変化とともに伸長成長速度が大きくなっており、Fig. 4 の成長曲線の傾向をマクロ的によく解釈しやすい値が得られている。もちろん数値微分のみ結果も原データを忠実に微分したもので数値的には間違っていないが、ノイズの影響を大きく受けており植物の成長状態を判断するため

のデータとしては使いにくい。以上のように本稿で述べた計算手法は、植物の成長データなどの時系列後退データからサンプル時刻の成長速度を簡便に算出するものとして有効であることが確かめられた。

Fig. 5 Result of proposed numerical differentiation applied to a plant elongation

摘 要

植物の成長を制御するための判断基準の一つとして植物のサンプル時刻における成長速度に着目し、ベクトルや行列と時系列後退データとの畳み込みで簡便に計算する手法を提案した。一般に用いられている関数を近似する方法では関数の決定方法などに客観的基準がなく周波数特性などの操作も容易ではなく、さらに(6)式のように時系列データとの畳み込みという非常に簡潔な手続きだけで結果を得ることは難しい。一方、本稿で提案した手法は生育環境制御システムの一部としても組込める可能性があると考えられる。

引用文献

- 1) 清水 浩：ローパスフィルタ遮断周波数の調整による植物生長データのノイズ除去法，植物工場学会誌，8(4)：237-243(1996)
- 2) 鈴木義一郎：データ解析術，実教出版，pp. 110-129(1989)
- 3) 三谷政昭：デジタルフィルタデザイン，昭晃堂，pp. 55-101(1991)
- 4) H. Shimizu and R. D. Heins：Computer-Vision-Based system for plant growth analysis, Trans. of the ASAE, 38(3)：959-964(1995)