解説

コンピュータ時代の数学教育^{*1}杉山 真澄^{*2}

コンピュータの画期的な進歩は、義務教育における数学教育を根本から考え直す必要を与えている。そこで数学教育の現状と問題点を挙げ、コンピュータ時代に相応した数学教育について考える。

1 小・中・高校における数学教育

1.1 数学教育の現状と問題点

(1) 非常に過密なカリキュラム

一般的に教師側としては教えたいことが沢山あるために非常に過密なカリキュラムとなっており、生徒が教わりたいと希望するところを教えられるようになっていない。

(2) 筆記試験

筆記試験で本当の意味の創造性をもつ人の選抜ができるかどうかはまず問題であろう。数学は点数化しやすいため、試験に強いかどうかの選別の手段となることが多く、そのため特に数学が好きとか嫌いとかの主原因となっている。能力には、筆記試験で測られるもの以外に、頭脳の動かし方の複雑さと質の程度、勘の良さ、頭脳的な馬力の強さなどがあり、人間の能力の程度は画一的に測られるものではない。にも拘らず、暗記や練習の成果の点検であるテストが多すぎる。点数教育であるのは、教師が検査しやすいからであることと、教わる側にも努力の効果の点数を確かめその達成を喜ぶところがあるからである。

能力として本当に自分に役立つものは、テストのために詰め込んだ知識や習得した技能というすぐ失われてしまうものではなく、それは心が耕されてその世界が豊かになったことである。

(3) 画一化された教材

教える側にも教わる側にも教科書の選択権がない。

同じテーマでもアプローチの仕方、解き方は違うし、そのやり方によってはテーマも変える必要があるにもかかわらずである。従って、多様な方が良い。とりあえず画一性を打破する為に、優秀なレベルに対して正当に対処をする必要がある。

1.2 実態

1982年の国際教育到達度評価学会(IEA)による第二回国際数学教育調査(表参照)^{*1}によると、日本の中学生(十三歳児)は参加した二十の国・地域中でトップ、高校三年生は参加した十五の国・地域中、香港に次ぎ二位であった。1964年に実施された第一回国際調査でも、日本の中学生の成績はトップであった。一、二回を比べてみると、全体の正答率はほぼ同じであるが、単純な計算問題の成績は、第二回は3ポイント上昇していた。しかし、読解力や判断力を要する問題の成績はさがってきており、思考力の必要な文章題の正答率は13ポイントも下がった。

しかも、例えば「学校での数学の勉強が楽しいか?」との質問に、「楽しい」と回答した生徒はわずか24%と、数学の授業に興味や関心を示すかどうかの調査結果は参加国中、わが国が最低の興味度であった。

小、中学校時代の詰め込み教育の積み重ねが高成績につながるとしても、その授業内容は思考力の育ちにくい、楽しくないものであるならば問題である。

現在、概念の理解を深めるために方程式を解くこと、導関数を求めること、面積や体積を計算することなど種々の問題に対する数値解を求めるための手

^{*1} Mathematical Teaching for the Computer Age

^{*2} Masumi Sugiyama, 東京女子大学文理学部 College of Arts and Sciences, Tokyo Woman's Christian University

^{*1} 「検証才能教育は今」『読売新聞』1991, 9, 11 付

続きが主に教えられている。また与えられた問題文には必要な情報以外ほとんどなく、要求される解答は常に教科書の類似の構造をもつ例題をまね、適切な方程式をたて、いつも用いる未知数 X について解くことである。しかも常に解けて答がある場合のみで、苦勞しても解けない場合はないのである。

また、そこで提示されたモデルの仮説をたてることや、解の直観的推定や、計算結果の正当性をテストすることなどに挑戦させることはない。

そして実際には、解の存在定理のように、解が存在するための条件を定めるだけで、それらの解を見つける方法は示していないような重要な結果も多くある。解の存在定理とその証明は、一般性と簡潔さを備えており数学者の好むものであるが、実際に問題を解くにあたっては、効率的な手続きが要求されるのである。特に、解答を得るためにコンピュータを利用するときには、あいまいさのない、有限の構成的手続きが必要不可欠である。

1.3 今後の教育目標

教育システムとは藤田氏⁵⁾によれば、

- (1) 目標や出力を定量的に表現できない
- (2) システムの良さを示す客観的な指数が得られない
- (3) 指導法と効果の関係は一般に明確でない
- (4) 従って評価関数が明白でない
- (5) 生徒の特性が絶えず変化している（学習し、成長発展している）オープンエンドシステムである。

教育とは、その人の生き方のスタイルを決定する手助けにすぎない。しかし人は自分のためになるなら、すぐ役に立たなくても、また国家や階級、金銭のためでなく、たとえ非常に難解であってもおもしろければ挑戦する。従って、興味をもって挑戦できるものを絶えず提供することが今後の教育目標となる。

極言すれば、現在の日本の教育システムは大学入学のための詰め込み教育で、人間として発展していくための教育とはほど遠い。また、評価関数が明白でないにもかかわらず偏差値が評価関数であるがごとくに人や学校の格付けを行っているのは実状を曲解させる。^{*2}

^{*2} 「大学別満足度」リクルート・リサーチ社の調査では、従来の偏差値による大学の評価でなく、いろいろな尺度からの評価がされた。

これからは、現実の複雑なデータを記録、分類、分析、処理、表示し、それを解釈しながら問題を深く考え、創造性が豊かになることを教えるべきで、処理技法を習得することを重点においていたのでは従来の方法と同じでクリエイティビティにつながらない。

また、コンピュータのブラックボックス的な面を非難して、解の過程（処理形式）の中で生徒が各ステップを自分で選択しなければならないようなルーティンを要求しがちであるが、これでは従来の方法と変わらない。

意志決定を必要とする状況で、提示された多くの情報に対して、的確な分析と判断をくだせるように訓練する必要がある。さらに問題の解答や、意志決定処理だけでなく、繰り返し予想推定仮説をたてそのシミュレーションをしてその結果を観察する必要もある。

また1変数の関数や方程式では応用に限界があるので、多数の変数や関係式も早くから扱うようにならざるをえなくなるが、現実の問題のあいまいさや不明さと苦闘する経験をつむことも必要であろう。

コンピュータの利用は、数学の原理と方法の応用に対し、新しいアプローチを実行するための挑戦と機会の両方の場を提供することができるのである。

1.4 今後の数学教育に求められるもの

ワードプロセッサ、コンピュータ、データベースなどが容易に使用できるようになり、データ解析の方法も多様な現在、各分野の壁が取り払われ、今日の学校では行われていない全体論的な問題解決が可能となる。

道具であるコンピュータを動かそうとすると、数学に関係した固有の処理や知識が必要になってくる。必要にせまられて、数学の根底が理解できれば、数学の本当のよさがわかりますます生徒は意欲を持ち、勉強するようになる。現代はコンピュータによる学習管理ではなく、学習の効率化、学習の高度化が図られる時代である。日本の教育体制は受験にプラスになるものに積極的に関心をもつから、コンピュータによる教育が効果的であれば即取り入れられるであろう。

学校教育が、コンピュータの使い方およびコンピュータが有効な道具となるための扱い方を習得させようとするならば、

- (1) 問題解決へのアルゴリズム論的アプローチ

表 数学教育調査の成績

国際教育到達度評価学会で実施した
第2回数学教育調査の成績(1982年)

(注) ベルギー (FL) = ベルギーのフラマン語圏、同 (FR) = 同フランス語圏、イギリス (SC) = スコットランド、同 (EN) = イングランド、カナダ (ON) = オンタリオ州、同 (BC) = ブリティッシュコロンビア州

- (2) 大量のデータを扱うための統計学概念と方法
- (3) 多くの定量化される新しい領域特有の複雑さをもつ応用へのモデリングアプローチ
- (4) 種々の解法の効率と計算量の比較を授業にとりいれる必要がある。

いずれにしても、コンピュータを使用しないで効果的に実行できる場合と、如何なる場合にコンピュ

ータをうまく利用すべきか、について教育するべきなのである。

1.5 日本の情報教育事情

まず、この数年の状況を概観する。1984年、当時の海外のコンピュータ教育推進の動きに刺激された通産省の働きかけを受けて、文部省は学習情報課を

新設した。そして、85年度予算に初等・中等教育へのコンピュータ導入とパーソナルコンピュータによる学習システム開発のための補助金を計上した。さらに、初等・中等教育へのコンピュータの基礎教育、コンピュータ利用教育の基本指針や具体策を審議するため、学識経験者や現場代表者からなる調査研究者会議を発足させた。また、85年12月には、社会教育審議会教育メディア分科会が「教育用ソフトウェアの開発指針」をまとめ、業者団体や都道府県教育委員会に通知した。90年には、文部省が学習ソフトの内容についての基準原案をまとめたが、これに対して業界から「検定に通じる」との反発が出たため、現在関係団体と協議のうえ基準案を作成中である。一方、教育ソフトの評価基準についての研究を委託している外郭団体「学習ソフトウェア情報教育センター」(東京)は、学校教育を所轄する初等中等教育局ではなく、社会教育を担当する生涯学習局所管であるというように、学校教育の現状を把握出来る体制にはなっていない。

また、文部省の調査によると、90年3月末現在、全国の小中高でパソコンを操作できる教師は全体の2割弱、コンピュータについて指導できるのは6%にすぎない。^{*3}

このような状況の中で、91年4月文部省内に小中高校の情報教育を全面的に掌握する情報教育室が創設され、93年度からは、いよいよ中学校でパソコン教育が開始されることとなった。

パソコン導入が現場の教育に先行し、実体はハード偏重(補助金)、ソフト軽視(予算不足)、教師不足となっている。利用実施にあたっては、設備を整え、教員教育担当者を置き、気の長いきめ細やかな配慮が必要であるが、現実には少ない予算の中、大きな課題を負っている現場の教師達の奮闘が当分続きそうである。

2 高等教育における数学

2.1 アルゴリズムについて

アルゴリズムとは、クヌース²⁾による定義によれば与えられた入力情報から、特定の出力情報を有限回のステップで得るための精密に定義された規則の列である。アルゴリズムの演算には、

(1) 算術

(2) 文字

(3) 関係

(4) 論理

がある⁴⁾。

アルゴリズムの解析に際して、与えられた問題を解くために得られた1つのアルゴリズムはさまざまな角度から解析しその有効性を評価する必要がある。

そのアルゴリズムが正しいか? 意図された通りに動くか? 解の効率性は? ステップ数? 時間?

これらにより領域的複雑さ、時間的複雑さを計る目安にする。

2.2 伝統的数学と計算機科学

クヌース²⁾によると、伝統的数学と計算機科学の間の違いは、扱う題材とアプローチの仕方にある。伝統的数学には、定理があり、無限の操作を許し、やりとりのない静的関係がある。

それに対して、計算機科学には、アルゴリズムがあり、有限の構造で、状況を適切に変化させる動的関係がある。

タッカー⁶⁾は、コンピュータ教育の基礎に記号処理および推論があることを主張している。

マウラー³⁾によると、次の事項がなされなければならないと考えられた。

(1) 伝統的数学をアルゴリズム的言語で記述すること

(2) アルゴリズムを証明法の1つとしてとらえること

すなわち1つのアルゴリズムを示し、それは求める解を与えるときのみ停止し、かつそれは実際に停止することが証明できれば、それと同時に解の存在が証明されたことになり、またその構成法をしめしたことになる

(3) アルゴリズムの正しさ効率性について論じること

すなわち論理、帰納法および数え上げの方法を用いて、どのようにアルゴリズムの正当性を証明し、またその計算量を決定するかを示すこと

(4) アルゴリズムについて現代的正確な概念を与えさらに再帰法などのいくつかの特殊な技法を示し、それらを通して人類の歴史の中で大きな位置を示す概念であることを認識すること。

伝統的数学を含む、壮大なアルゴリズムによる学

*3 「教育とパソコン」『朝日新聞』1991, 9, 21 付。

問の再構築を早急にして、普及させることが肝要である。

2.3 これからの数学

コンピュータの数値、図形および記号処理能力は問題を解いたり理論的に分析したりするのに強力な道具となる。基本的な手順のうち簡単な場合だけで、複雑な場合はコンピュータにまかせるようにすれば良い。これからの数学は、後で述べる数学の歴史をふまえて新しく変化していくべき方向を挙げる。

2.3.1 アルゴリズム論的方法による代数学、微積分学

アルゴリズム論的に伝統的課程を再編成するとは、例えば初等代数学の重要な題材である2次方程式の解の公式について言えば、標準的な因数分解による解法は限られた場合にしか適用できないが、解の公式による解法は、すべての場合に有限回の算術および論理計算ですべて解を決定することができるという正確なアルゴリズムを要約したものである。このようなアプローチは高々なにがしかの内容をつけ加えるだけで、大きな変化がないように思われるかも知れないが、自動化可能な問題解法手続きをさがす習慣およびアルゴリズム設計に有効な手段の開発・発展につながるのである。

2.3.2 離散幾何学

19世紀後半のミンコフスキーの数の幾何学に始まり、点や図形の配置の最適化問題、極値問題を扱う。その中で、有限個の点や図形の配置を扱うのを組み合わせ幾何と言う。

特徴

- (1) 初等幾何の延長線上にあり取り付きが容易
- (2) よいアイデアがいかにして問題解決に役立つかが良くわかる
- (3) 未解決の問題の多くが予備知識がほとんどなくても直観的に理解でき、それに挑戦して解決できる可能性がある

2.3.3 数理モデリング

問題の解答、意志決定処理、または予想決定のために数学を適切に応用するには、その問題設定をよく知る必要がある。そのための概略的なアプローチの仕方が数理モデリングである。

その過程は、

(1) 問題の定式化

- (1.1) 問題となっていること、決定すべき事柄は何か。
- (1.2) 問題の中で重要な要素は何か、変数はどれで、定数はどれか。
- (1.3) 問題の諸要素間の相互関係はいかに。

(2) 数学を用いて解や値を求める。

(3) 仮説の意味決定。

(4) 予想をあてはめテストして、形式的推論の解釈を行う。

などである。モデル化された仮説が、設定された問題の本質的構造をどれだけ正確にとらえているかに応じて、論理的結論がどれだけ現実世界の動きに適合するかが決まるため、問題の定式化のより創造的で構成的な側面が学べる。

2.3.4 関数とグラフ

極限、微分、積分、の意味や計算方法、近似法による連続現象の研究。

2.3.5 アルゴリズムの解析

2.3.6 データ解析

2.3.7 近似法

関数の値を近似する方法（微分、積分、接平面、テラー多項式）

定積分の値を近似する方法（リーマン和、台形公式、シンプソンの公式）

コンピュータの算術演算で異常現象をおこす近似計算について特に注意を促しておく。

3 数学について

3.1 歴史的、文化的観点からみた数学教育

数学はあらゆるものを超えた普遍文化のように考えられがちであるが、時代、国、民族により数学への問題意識に差がある。近代文化が特異的に普遍性を備えているからといって、歴史を超えて一般化する訳にはいかない。16世紀の数学の問題意識と、19世紀のと同じ基準で考えることはできないし、また同じ17世紀でもヨーロッパと日本とを同じ基準で計る訳にはいかない。

歴史的にみてもヨーロッパでは産業革命前は宗教権力による私教育で、産業革命後国家権力による公教育が行われたが、日本では江戸時代までは私教育が盛んであり、明治国家体制後公教育となった。

ヨーロッパ中世の三学四科とは三学は哲学のレトリカ、グラマティカ、ディアレクティカで、四科とは数学の点を数える数論（1つ1つわかれていた豆）、砂に絵を描く幾何（つながっている線）、空を眺める天文、音楽であった。

3. 1. 1 16 世紀までの数学

(1) バビロニア

小数：分、秒などの 60 進法

まず単位で測って余りがあると、別の小さな補助単位で測るそれをまたさらに精密化

(2) ギリシャ数学

分数：二つの量を同時に考え別の単位によりその双方を整数化する

$$\frac{2}{3} = 2 \div 3$$

・互除法を原型として、逐次近似の手法となりコンピュータのループとなる

公理幾何学：ギリシャに 2500 年前からあり、二、三の自明な公理を仮定し、それから論理だけで定理を導くものである。

(3) インド数学

小数：近代的な数直線による表示

(4) 中国数学

分数：

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times 2$$

小数：分、厘、毛の補助単位使用

1579 年ヴィエタが代数に未知の量を表すものとして変数 x, y, z などを使い始めた。

数直線の変数という性質から、変化を扱う近代解析学に、面積のイメージの強い $2m^2$ と長さのイメージの $3m$ とが座標の上で「長さ」に一元化されて足すという文字式 $2m^2 + 3m$ を導入して代数式から近代代数学に、点の位置の座標表示と代数式による図形の計算から近代幾何学を発展させてきた。

3. 1. 2 17 世紀の数学

デカルトの幾何：実数の順序対による平面上での点の座標を考案し、これにより代数式を幾何学曲

線で表せるようになった。

異種の量の積：(重さ) × (長さ)

数直線上に没个性的に数がまき散らされ、次元を超えて数式の処理を行うようになった。

ヨーロッパでは魔術師達が魔術的世界観を語るものとして数学を用いていて、17 世紀になって魔術が科学になるとともにそれが科学的世界観になった。

3. 1. 3 18 世紀の数学

オイラーらによる算術・算法（古典的アルゴリズム）

異種の量の割算：(速度) = (距離) ÷ (時間)

日本では、江戸時代、従来とは隔絶した手法により代数式の表現や方程式の判別式、根の変換問題、級数の和などを考えた関孝和や行列式やベルヌイ数などさまざまな業績で知られる建部賢弘らの和算は、技術的ではあっても世界観と結びつかないところがヨーロッパ数学とちがったのである。

3. 1. 4 19 世紀後半から 20 世紀前半

カントール、ヒルベルト、ワイエルストラスらによる数学の基礎付け、公理的アプローチ、"存在定理"

3. 1. 5 現代

デジタルコンピュータの出現により数学のみならず科学技術が離散アルゴリズム論的傾向の時代である。このことはわれわれの住む宇宙に摂理があることを示す"存在定理"だけでなく、それを発見し入手するまでの手続き方法アルゴリズムを示さなければならない時代になっている。

3. 2 なぜ数学嫌いになるか

数学は特に、理解してしまえば容易であることが、理解しない間は耐えがたいということがある。理解しない状態と理解している状態という、混ざった状態にどれだけ耐えられるかで、その差が極端にでやすく、得意だと平気で、苦手だと思い込むととてもそこまで図々しくなれずあきらめてしまう。

さらに理解を妨げるものに正しく速くということとを要求されることもその一因があると思うが、実際にはそれよりもどこかで間違ったときにそれに気づいておかしいと思い、どの辺で間違ったかという見当が付き、そこを直せる能力の方が本当に役に立つ

のである。人間は間違ふ、しかし間違った時に適合する能力がある。ところが正しく速くは、同じことを一生懸命努力練習すればできる。正しく速くを言い過ぎると、結果重視になる可能性があり、つまずいたら立ち上がれなくなり、迷ったらどうしようもないと言うことになりがちである。一度つまずくとダメになるという面が数学は特に強く出やすい。

数学は便利な道具、考えるための方法、楽しいものである。にもかかわらず、苦手意識が出てくるのは何故であろうか。実際的な問題やおもしろい問題を取り上げない、効果のない、不十分な教育環境と、自分には能力がないと思ひ込んでしまう、または思い込まされてしまうことによる。

教え方の問題もあるが、何でも教えれば良いというものではない。

自分で作ったり、改良したりすることにより、分析力、作能力が向上し、他のものを評価する目を養成する事になる。

目的意識を持つことも学習効果の上がる方法で、目的を立ててそれに向かってやり遂げようとする自覚を持つことが大切である。

数学嫌いとなる心理的要因には次のような点がある。

- (1) 数学の非人格性：物事を特別に個人的に把握し客観的に把握しにくいと、数に抵抗を感じてしまう
- (2) ふるい分け：人には生まれつき意味やパターンをみつけたがる傾向があり、平凡なことや自分に無関係なことをふるい分けわけようとする傾向がある。

- (3) 個人の資質と理想像との混同：多くの才能、さまざまな魅力、優雅さ、美しさなどが非常に多くの人の間に分散している現状に対して、自分だけが理解出来ない、不幸である、と考えて落ち込んでしまう。

自分だけが不幸であると皆が考えたら、不幸な人だらけになって統計的におかしいのである。

3.3 数学恐怖症の解決法

- ・2人以上で身ぶり手ぶりを交えて問題に取り組んでみる
- ・距離の問題などの時は、外を実際にあるいてみる
- ・ボールや小箱、果物など実際の物、道具も使ってみる

- ・他の人に説明してみる
- ・もう少し時間をかけて考えてみる
- ・もっと小さな数字を使ってみる
- ・関係のあるもっと簡単な問題を調べてみる
- ・もっと一般的な問題を調べてみる
- ・その問題に関連した情報を集めてみる
- ・答から逆にたどってみる
- ・絵や図を描いてみる
- ・その問題あるいはその一部を理解できる問題と比較してみる
- ・できるだけ多くの問題や例に取り組んでみる

目で見たり耳で聞いて覚えただけでは、時間の経過とともに確実に薄れてしまう。誰かに話すことで口が覚え、それを聞いた耳が覚える。誰かに向かつて話すにはインプットした情報をさらに説得し得るように整理しなければならない。自分の中に曖昧に入ってくる情報を一貫した独自のものとしてそしゃくしたものを二つの器官で覚えるのであるから、完全に把握できるし忘れることはない。

情報とはただインプットするだけでは宝の持ち腐れに終わってしまい、効率よくアウトプットすることで価値が生ずるのである。

3.4 数学とユーモア

数学とユーモアは、他の知的な遊び：頭の体操、パズル、ゲーム、パラドックスなどと共通なところがある。まず最初にアイデアを持っていなければならない。そして発明の才、矛盾を感じとる能力、簡潔な表現力がある。アイデアをおもしろ半分にはばばらにしたりくっつけたり並べたり、一般化したり繰り返したり逆にしたりする。また条件をゆるめたり、強めたりしたらどうなるかを考える。

現在これらの知的遊びが授業に取り上げられていないのは、子供の方が簡単に先生を負かしてしまうからではないか。学校の授業における、解答解説を知っている教師と知らない生徒の関係が崩れてしまっているのは困るのである。

3.5 人間の能力とコンピュータの能力

人間の能力には論理的なものだけではなく、直観、経験、主観、総合判断、洞察などがあるが、コンピュータの能力はあくまでも限定された論理とその組み合わせによる、人間の要求に応じた形での大量のデ

ータの演算処理と情報伝送処理である。

ファインマン氏と算盤の名人とが計算の競争をしたとき、はじめのうちは互角であったのが、むずかしくなるとファインマン氏の方はいろいろな手を考え計算したが、算盤の名人はあくまでも定型化したやり方であったそうである。これからの人間はコンピュータのできない思考、発想の部分の磨いていくべきなのである。

文 献

- 1) J. T. Fey ed. 『数学教育とコンピュータ』, 東海大学出版会. 1987.
- 2) D. E. Knuth, " Computer Science and Its Relation to Mathematics" , ' American Mathematical Monthly ' 81, 323-343, 1974.
- 3) S. B. Maurer " The Effects of a New College Mathematics Curriculum on High School Mathematics" , ' The Future of College Mathematics' , Springer-Verlag 153-176, 1983.
- 4) T. L. Booth & Y. T. Chien, " Computing: Fundamentals and Applications" , Hamilton Publishing Co., 1974.
- 5) 藤田広一. 『教育情報工学概論』. 昭晃堂. 1975.
- 6) A. Tucker, " Principles for a Lower-Division Discrete-Systems-Oriented Mathematics Sequence" , ' The Future of College Mathematics' , Springer-Verlag 135-144, 1983.

(1991 年 10 月 31 日受付)

(1991 年 11 月 18 日採録)

著 者 紹 介

杉山真澄 (正会員)

昭和 44 年東京女子大学文理学部数理学科卒業. 昭和 46 年東京工業大学大学院修士課程修了. 同年東京女子大学文理学部数理学科助手, 現在に至る. 専門は位相幾何学. 翻訳に「おもしろいトポロジー」(露語訳, 東京図書). 論文に「四元数射影空間の自己写像」, 「高等教育における教育改革に向けて」, 他多数.