621. 882. 6 : 539. 384. 2

Untersuchung über die Statische Biegesteifigkeit von Verschraubten Fugen an Werkzeugmaschinen (1)*

Von Yoshimi Ito** und Masami MASUKO***

Es sind bisher wohl mehrere experimentelle Untersuchungen von statischen und dynamischen Eigenschaften der verschraubten Fugen an Werkzeugmaschinen durchgeführt worden, aber rechnerische Untersuchungen über dieses Problem sind nicht behandelt.

Aus diesem Grund wird der verschraubte Balken unter Berücksichtigung der vorhergehenden experimentellen Versuchsergebnisse durch einen elastisch gestützten Balken ersetzt, und die Analyse von der statischen Biegesteifigkeit der verschraubten Fugen wird mit Hilfe dieses Modells durchgeführt.

Die Ergebnisse zeigen, daß die Biegesteifigkeit durch die folgende Gleichung dargestellt wird:

$$K_b = \frac{K_0}{F(\lambda, \kappa) - G(\lambda, \kappa)Q/P}$$

mit

K_b = Biegesteifigkeit des verschraubten Balkens,

K_0 = Biegesteifigkeit des Kragbalkens,

P = statische Biegekraft,

Q = Vorspannkraft der Schrauben,

$F(\lambda, \kappa)$ und $G(\lambda, \kappa)$ = Funktionen, die von den Maßen der Fugen (λ) und der Gegenkraft (κ) an den Schrauben abhängig sind.

1. Einleitung

Im frühen Referat⁽¹⁾ wurde die allgemeine Erklärung der verschraubten Fugen, die eine Form der Verbindungsstelle an Werkzeugmaschinen ist, beschrieben. Darüber hinaus wurden die experimentellen Modellversuche über die statische Biegesteifigkeit vom mit zwei Bolzen verschraubten Kragbalken, der im Bild 1 wiedergegeben ist, durchgeführt.

Die Versuche klärten, ob und in welchem Maße Biegekraft, Vorspannkraft, Schraubenabstand, Schraubendurchmesser und andere Einflußgrößen auf das Steifigkeitsverhalten der verschraubten Fugen einwirken, und weiter zeigte sich das eigentümliche Steifigkeitsverhalten. Darüber hinaus zeigte die Durchbiegung des verschraubten Kragbalkens eine Kurve zweiten Grades. Daher ist es möglich, daß die theoretische Berechnung der statischen Biegesteifigkeit vom verschraubten Kragbalken mit Hilfe eines elastisch gestützten Balkens durchgeführt werden.

In diesem Referat werden das Modell des verschraubten Kragbalkens zur Berechnung und das analytische Ergebnis über seine statische Biegesteifigkeit berichtet.

2. Liste der Formelzeichen

Die Formelzeichen, die im diesem Referat benutzt werden, sind im folgenden gezeigt. Weiter bedeutet

Bild 1

* Eingegangen am 23 April, 1968.

** Assistent, Technische Hochschule Tokyo, Meguro-ku, Tokyo.

*** Professor, Technische Hochschule Tokyo.

der Index u den Kraftangriff nach oben, und d denjenigen nach unten.

b : Breite des Balkens

d : Durchmesser der Verbindungsschraube

E : Elastizitätsmodul des Balkens

E_b : Elastizitätsmodul der Verbindungsschraube

$F_u(\lambda, \kappa)$, $G_u(\lambda, \kappa)$, $F_d(\lambda, \kappa)$ und $G_d(\lambda, \kappa)$:

Funktionen der Verhältniszahl über den Maßen der Fugen und der Gegenkraft, die den Einfluß der Durchbiegung und die Schiebung darstellen. [an oberer Biegestelle, vgl. Gl. (36) und an unterer Biegestelle, vgl. Gl. (37)]

G : Schiebungsmodulus des Balkens

h : Dicke des Balkens

I : Trägheitsmoment des Balkens

I_b : Trägheitsmoment am Schaft der Verbindungsschraube

K_{0u} und K_{0d} : Federkonstante des angenommenen Kragbalkens;

$$K_{0u} = 3EI/L_u^3 \text{ oder } K_{0d} = 3EI/L_d^3$$

K_i : Äquivalente Federkonstante der Stütze i . ($i=1, 2, 3$)

Bei positiver Reaktionskraft R_i , $K_i=k_b$ und bei negativer Reaktionskraft, $K_i=k$ oder $K_i=k_{edge}$.

k_b : Federkonstante der Verbindungsschraube

k_{edge} : Äquivalente Federkonstante von der Unterlagesecke

k : Äquivalente Federkonstante der Unterlage

K_{bu} und K_{bd} : Statische Biegesteifigkeit des verschraubten Kragbalkens

L_u und L_d : Kraglänge des angenommenen Kragbalkens

l_{1d} : Abstand von der Unterlagesecke bis zur vorderen Verbindungsschraube (an unteren Biegestelle)

l_{1u} : Abstand von der Balkensecke bis zur hinteren Verbindungsschraube (an der oberen Biegestelle)

Q =Vorspannkraft

P =Biegekraft

M_b =Widerstandsmoment des Verbindungsschraubenkopfs,

K_1 =Federkonstante der Unterlage= $k(R_{1u}<0)$

$K_2=k(R_{2u}<0)$

$=k_b(R_{2u}>0)$ =Federkonstante der Verbindungsschraube

$K_3=k(R_{3u}<0)$

$=k_b(R_{3u}>0)$

R_{1u} , R_{2u} , R_{3u} =Reaktionskräfte

Bild 2 Modell des mit zwei Bolzen einreihigen verschraubten Kragbalkens (an der oberen Biegestelle)

M_b : Widerstandsmoment des Verbindungsschraubenkopfs

m : Formkoeffizient des Balkens

P : Biegekraft

p : Schraubenabstand

Q_i : Vorspannkraft der Verbindungsschraube i ($i=1, 2, 3$)

R_{1u} und R_{1d} : Reaktionskräfte an der Stütze i ($i=1, 2, 3$)

Unbenannte Größen:

$$\alpha_u = \frac{p}{l_{1u}}, \quad \gamma_u = \frac{p}{L_u}, \quad \alpha_d = \frac{p}{l_{1d}}, \quad \epsilon_{1d} = \frac{h}{L_d},$$

$$\epsilon_{2d} = \frac{l_{1d}}{h}, \quad \epsilon_b = \frac{E_b I_b}{EI}, \quad \gamma_d = \frac{p}{L_d}, \quad \epsilon_{1u} = \frac{h}{L_u},$$

$$\epsilon_{2u} = \frac{l_{1u}}{h}, \quad \epsilon_{eq} = \frac{I_{eq}}{I}$$

3. Modell der verschraubten Fugen und rechnerische Untersuchung über seine Biegesteifigkeit

3.1 Modell der verschraubten Fugen

Zur rechnerischen Untersuchung wird der Kragbalken mit zwei Verbindungsbolzen durch den elastischen Balken auf drei elastischen Stützen modelliert, wie in Bild 2 und Bild 3 gezeigt. Nämlich sind an der oberen Biegestelle die Stützen an den beiden Verbindungsschraubenstellen und der Balkensecke (in Bild 1 bezeichnet mit A) dargestellt. An der unteren Biegestelle sind die Stützen des elastischen Balkens auf gleiche Weise dargestellt, aber die Unterlagesecke (in Bild 1 bezeichnet mit B) anstatt der Balkensecke benutzt wird.

An den Stützen der beiden Verbindungsschraubenstellen setzt man voraus, daß gemäß der Richtung der Reaktionskraft die Federkonstante der Verbindungsschraube oder die äquivalente Federkonstante der Unterlage in die Federkonstante der Stütze eingeführt wird, und weiter zeigt die Reaktionskraft den negativen Wert an der übrigen Stütze, d.h. die Federkonstante ist k oder k_{edge} .

Q =Vorspannkraft

P =Biegekraft

$K_1=k(R_{1d}<0)$ =Federkonstante der Unterlage

$=k_b(R_{1d}>0)$ =Federkonstante der Verbindungsschraube

$K_2=k(R_{2d}<0)$

$=k_b(R_{2d}>0)$

$K_3=k_{edge}(R_{3d}<0)$ =Federkonstante der Unterlagesecke

R_{1d} , R_{2d} , R_{3d} =Reaktionskräfte

Bild 3 Modell des mit zwei Bolzen einreihigen verschraubten Kragbalkens (an der unteren Biegestelle)

3.2 Analyse der statischen Biegesteifigkeit an der oberen Biegestelle

Wie oben erwähnt, wird das Modell des verschraubten Balkens für die obere Biegestelle ersetzt, wie gezeigt in Bild 2. Daher wird die statische Biegesteifigkeit unter Berücksichtigung der folgenden Durchbiegungen wie nachfolgend berechnet.

- ① Durchbiegung durch das Biegen
- ② Durchbiegung durch Schiebung
- ③ Zusätzliche Durchbiegung durch Bolzenlöcher

Infolge der experimentellen Ergebnisse⁽¹⁾ wird die Biegesteifigkeit des verschraubten Kragbalkens durch die Stütze, die nahe an der Unterlagesecke ist, sehr stark beeinflusst. Um diese Einflußgröße in Betracht zu ziehen, muß man auch das Widerstandsmoment des Verbindungsschraubenkopfs, das die Durchbiegung des Balkens verkleinert in Rechnung stellen.

3.2.1 Durchbiegung durch das Biegen

Die Gleichung für das Kräftegleichgewicht ist nach Bild 2

$$R_{1u} + R_{2u} + R_{3u} - P = 0 \quad (1)$$

Für das Momentengleichgewicht gilt

$$-l_{1u}R_{2u} - l_{2u}R_{3u} + Pl_u - M_b = 0 \quad (2)$$

Weiter werden die Differentialgleichungen für drei Teilstrecken der elastischen Linie aufgestellt:

1. im Bereich $0 \leq x \leq l_{1u}$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2w}{dx^2} &= -\frac{1}{EI}R_{1u}x \\ \frac{dw}{dx} &= -\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}R_{1u}x^2 + C_{u11}\right) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$w = -\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{6}R_{1u}x^3 + C_{u11}x + C_{u12}\right) \quad (4)$$

2. im Bereich $l_{1u} \leq x \leq l_{2u}$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2w}{dx^2} &= -\frac{1}{EI}\{(R_{1u} + R_{2u})x - R_{2u}l_{1u}\} \\ \frac{dw}{dx} &= -\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{2}(R_{1u} + R_{2u})x^2 - R_{2u}l_{1u}x + C_{u21}\right\} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$w = -\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{6}(R_{1u} + R_{2u})x^3 - \frac{1}{2}R_{2u}l_{1u}x^2 + C_{u21}x + C_{u22}\right\} \quad (6)$$

3. im Bereich $l_{2u} \leq x \leq l_u$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2w}{dx^2} &= -\frac{1}{EI}\{Px - R_{2u}l_{1u} - R_{3u}l_{2u} - M_b\} \\ \frac{dw}{dx} &= -\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{2}Px^2 - R_{2u}l_{1u}x - R_{3u}l_{2u}x - M_bx + C_{u31}\right\} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$w = -\frac{1}{EI}\left\{\frac{1}{6}Px^3 - \frac{1}{2}R_{2u}l_{1u}x^2 - \frac{1}{2}R_{3u}l_{2u}x^2 - \frac{1}{2}M_bx^2 + C_{u31}x + C_{u32}\right\} \quad (8)$$

Hierbei ist c_{uij} die Integrationskonstante ($i=1, 2, 3, j=1, 2$).

Zur einfachen Lösung dieses Gleichungssystems nehmen wir an, daß beide Verbindungsschrauben mit gleicher Kraft vorgespannt sind. In diesem Fall sind die Randbedingungen

1) für $x=0$ folgt $w_{x=0} = \frac{R_{1u}}{k}$

2) für $x=l_{1u}$ folgt $w_{x=l_{1u}} = \frac{R_{2u}}{K_2} - \frac{Q}{k}$, $w_{Ber1} = w_{Ber2}$, $\left(\frac{dw}{dx}\right)_{Ber1} = \left(\frac{dw}{dx}\right)_{Ber2}$,

3) für $x=l_{2u}$ folgt $w_{x=l_{2u}} = \frac{R_{3u}}{K_3} - \frac{Q}{k}$, $w_{Ber2} = w_{Ber3}$, $\left(\frac{dw}{dx}\right)_{Ber2} = \left(\frac{dw}{dx}\right)_{Ber3}$.

Nach einigen Umformungen erhält man das folgende System linearer Gleichungen:

$$C_{u12} = -EI \frac{R_{1u}}{k} \quad (9)$$

$$\frac{R_{2u}}{K_2} - \frac{Q}{k} = -\frac{1}{EI} \left(\frac{1}{6}R_{1u}l_{1u}^3 + C_{u11}l_{1u} + C_{u12} \right) \quad (10)$$

$$C_{u11}l_{1u} + C_{u12} = -\frac{1}{3}R_{2u}l_{1u}^3 + C_{u21}l_{1u} + C_{u22} \quad (11)$$

$$C_{u11} = -\frac{1}{2}R_{2u}l_{1u}^2 + C_{u21} \quad (12)$$

$$\frac{R_{3u}}{K_3} - \frac{Q}{k} = -\frac{1}{EI} \left(\frac{1}{6}Pl_{2u}^3 - \frac{1}{2}R_{2u}l_{1u}l_{2u}^2 - \frac{1}{2}R_{3u}l_{2u}^3 - \frac{1}{2}M_b l_{2u}^2 + C_{u31}l_{2u} + C_{u32} \right) \quad (13)$$

$$C_{u21}l_{2u} + C_{u22} = -\frac{1}{3}R_{3u}l_{2u}^3 + C_{u31}l_{2u} + C_{u32} - \frac{1}{2}M_b l_{2u}^2 \quad (14)$$

$$C_{u21} = -\frac{1}{2}R_{3u}l_{2u}^2 - M_b l_{2u} + C_{u31} \quad (15)$$

Merzt man aus den oben genannten Gleichungen die Integrationskonstanten aus, so wird die Gl. (16) abgeleitet:

$$\left\{ \frac{l_{2u}}{l_{1u}} \frac{1}{k} - \frac{l_{1u}^2 l_{2u}}{6EI} - \frac{1}{k} \right\} R_{1u} + \left\{ -\frac{l_{1u} l_{2u}^2}{2EI} + \frac{l_{1u}^2 l_{2u}}{2EI} - \frac{l_{2u}}{l_{1u}} \frac{1}{K_2} - \frac{l_{1u}^3}{6EI} \right\} R_{2u} + \left\{ \frac{1}{K_3} - \frac{l_{2u}^3}{6EI} \right\} R_{3u} + \left\{ -\frac{Q}{k} + \frac{Pl_{2u}^3}{6EI} + \frac{l_{2u}}{l_{1u}} \frac{Q}{k} \right\} = 0 \dots\dots\dots(16).$$

Unter Berücksichtigung der Widerstandsmoment am vorderen Schraubenkopf kann man folgende Randbedingung voraussetzen:

$$\left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=l_{2u}} = \Theta_b \dots\dots\dots(17).$$

Hierbei ist Θ_b der Neigungswinkel des Verbindungsschraubenkopfs, der durch das Biegen des Bolzenschafts hervorgerufen wird.

Das Berechnungssystem des Neigungswinkels ist in Bild 4 dargestellt, wobei die Verbindungsschraube als Kragbalken, der an der Fläche der Unterlage festgespannt ist, angenommen wird.

Durch das Biegemoment M_b wird die Mittellinie der Schraube wie CO'C' eingebogen, d.h. die Punkte O und A werden zu O' und A' verschieben. Es ist leicht denkbar, daß der Winkel $\angle A'O'A_0$ gleich dem Neigungswinkel Θ_b ist, daher gilt für den Neigungswinkel

$$\Theta_b = -\frac{h}{2E_b I_b} M_b \dots\dots\dots(18).$$

Aus Gl. (17) und Gl. (18) geht der Widerstandsmoment M_b hervor:

$$M_b = \frac{2\varepsilon_b}{h} \left\{ \frac{1}{2} R_{1u} l_{2u}^2 + \frac{1}{2} R_{2u} l_{2u}^2 - R_{2u} l_{1u} l_{2u} + \frac{1}{2} R_{2u} l_{1u}^2 - \frac{EI}{l_{1u}} \frac{R_{2u}}{K_2} + \frac{EI}{l_{1u} k} (Q + R_{1u}) - \frac{1}{6} R_{1u} l_{1u}^2 \right\} \dots\dots\dots(19),$$

wobei $\varepsilon_b = \frac{E_b I_b}{EI}$ gesetzt ist.

Durch das Einsetzen der Gl. (19) in Gl. (2) ergibt sich

$$\frac{\varepsilon_b}{h} \left\{ -\frac{2EI}{kl_{1u}} l_{2u}^2 - \frac{l_{1u}^2}{3} \right\} R_{1u} + \frac{\varepsilon_b}{h} \left\{ 2l_{1u} l_{2u} - l_{1u}^2 - l_{2u}^2 + \frac{2EI}{K_2 l_{1u}} - \frac{h}{\varepsilon_b} l_{1u} \right\} R_{2u} - l_{2u} R_{3u} + \left(Pl_{1u} - \frac{2\varepsilon_b}{h} \frac{EI}{kl_{1u}} Q \right) = 0 \dots\dots\dots(20).$$

Mit Hilfe der unbenannten Größen und der Federkonstante K_{0u} erhält man die unbenannten Gleichungen, und aus diesen Gleichungen kann man für eine gegebene Belastung die Reaktionskräfte an jeder Stütze wie folgt berechnen:

$$R_{1u} = \frac{1}{\varphi_u} (\psi_{1u} P - \xi_{1u} Q), \quad R_{2u} = \frac{1}{\varphi_u} (\psi_{2u} P - \xi_{2u} Q), \quad R_{3u} = \frac{1}{\varphi_u} (\psi_{3u} P - \xi_{3u} Q) \dots\dots\dots(21).$$

Hierbei sind φ_u , ψ_{iu} und ξ_{iu} ($i=1, 2, 3$) die Hilfsfunktionen, die den Einfluß der verschraubten Fuge zeigen.

Die Hilfsfunktionen werden durch folgende Gleichungen dargestellt:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_u &= \varphi_{bu} + \varphi_{\varepsilon u} \\ \varphi_{bu} &= \frac{1}{k} \alpha_u^2 + \frac{1}{K_2} (1 + \alpha_u)^2 + \frac{1}{K_3} + \frac{1}{K_{0u}} \gamma_u^3 \left(1 + \frac{1}{\alpha_u} \right) \\ \varphi_{\varepsilon u} &= \frac{2}{3} \varepsilon_b \left[\frac{1}{k} \left\{ \frac{K_{0u}}{K_3} \left(\frac{\alpha_u}{\gamma_u} \right)^2 \frac{1}{\varepsilon_{1u}} - 2\alpha_u^3 \varepsilon_{2u} \right\} + \frac{1}{K_2} \left\{ \frac{K_{0u}}{k} \left(\frac{\alpha_u}{\gamma_u} \right)^2 \frac{1}{\varepsilon_{1u}} - (\alpha_u^3 + 3\alpha_u^2 + \alpha_u + 1) \varepsilon_{2u} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2K_{0u}}{k} \left(\frac{\alpha_u}{\gamma_u} \right)^3 \alpha_u \varepsilon_{2u} \right\} - \frac{1}{K_3} \left\{ \varepsilon_{2u} + \frac{K_{0u}}{K_2} \left(\frac{\alpha_u}{\gamma_u} \right)^2 \frac{1}{\varepsilon_{1u}} \right\} - \frac{3}{4} \frac{1}{K_{0u}} \varepsilon_{2u} \gamma_u^3 (4 + \alpha_u) \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(22)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_{1u} &= \psi_{b1} + \psi_{\varepsilon 1} \\ \psi_{b1} &= \alpha_u \left\{ \gamma_u^2 \frac{1}{2K_{0u}} - \frac{1 + \alpha_u}{\gamma_u} \frac{1}{K_2} - \left(1 + \frac{1}{\gamma_u} \right) \frac{1}{K_3} \right\} \\ \psi_{\varepsilon 1} &= \varepsilon_b \left\{ \alpha_u^2 \varepsilon_{2u} - \frac{2}{3} \frac{K_{0u}}{K_2} \left(\frac{\alpha_u}{\gamma_u} \right)^2 \frac{1}{\varepsilon_{1u}} \right\} \frac{1}{K_3} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(23)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_{1u} &= \xi_{b1} + \xi_{\varepsilon 1} \\ \xi_{b1} &= \frac{1}{k} \alpha_u^2 \\ \xi_{\varepsilon 1} &= -\varepsilon_b \frac{1}{k} \left[\alpha_u^3 \varepsilon_{2u} - \frac{2}{3} \left(\frac{\alpha_u}{\gamma_u} \right)^2 \frac{1}{\varepsilon_{1u}} \left(\frac{\gamma_u^3}{2} - \frac{K_{0u}}{K_2} - \frac{K_{0u}}{K_3} \right) \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(24)$$

h : Dicke des Balkens

I_b : Trägheitsmoment am Schaft der Verbindungsschraube

Bild 4

$$\left. \begin{aligned} \psi_{2u} &= \psi_{b2} + \psi_{\varepsilon 2} \\ \psi_{b2} &= -\frac{1}{k} \frac{\alpha_u}{\gamma_u} + \left\{ 1 + \alpha_u \left(1 + \frac{1}{\gamma_u} \right) \right\} \frac{1}{K_3} - \frac{1}{K_{0u}} \gamma_u^2 \left(\frac{\alpha_u}{2} + \frac{1}{\alpha_u} + \frac{3}{2} \right) \\ \psi_{\varepsilon 2} &= \varepsilon_b \frac{1}{K_3} \left\{ \frac{2}{3} \frac{K_{0u}}{k} \frac{1}{\varepsilon_{1u}} \left(\frac{\alpha_u}{\gamma_u} \right)^2 - \left(\frac{2}{3} + 2\alpha_u + \alpha_u^2 \right) \varepsilon_{2u} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi_{2u} &= \xi_{b2} + \xi_{\varepsilon 2} \\ \xi_{b2} &= -\frac{1}{k} \alpha_u (1 + \alpha_u) \\ \xi_{\varepsilon 2} &= -\varepsilon_b \frac{1}{k} \left\{ \frac{2}{3} \frac{1}{\varepsilon_{1u}} \left(\frac{\alpha_u}{\gamma_u} \right)^2 \left\{ -\frac{K_{0u}}{K_3} + \frac{\gamma_u^3}{2} \left(1 + \frac{3}{\alpha_u} + \frac{2}{\alpha_u^2} \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{3} \frac{K_{0u}}{k} \alpha_u \left(\frac{\alpha_u}{\gamma_u} \right)^2 \frac{1}{\varepsilon_{1u}} - \frac{2}{3} \alpha_u \left(\frac{2}{3} + 2\alpha_u + \alpha_u^2 \right) \varepsilon_{2u} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

$$\psi_{3u} = \varphi_u - (\psi_{1u} + \psi_{2u}) \dots\dots\dots (27)$$

$$\xi_{3u} = -(\xi_{1u} + \xi_{2u}) \dots\dots\dots (28)$$

Aus diesen Hilfsfunktionen erkennt man, daß der Einfluß des Schraubenkopfs von der Hilfsfunktion mit Index ε bestimmt wird. Setzt man nun Gleichung (21) in Gleichung (8) ein und nimmt man $x = L_u + l_{1u} + p$ an, so ergibt sich für die Durchbiegung $w_{b \max}$ durch Biegen

$$K_{0u} w_{b \max} = F_{bu}(\lambda, \kappa) P - G_{bu}(\lambda, \kappa) Q \dots\dots\dots (29)$$

Hierbei zeigen die Funktionen $F_{bu}(\lambda, \kappa)$ und $G_{bu}(\lambda, \kappa)$ die Einflüsse der verschraubten Fugen auf die Biegesteifigkeit und sie werden mit nachfolgenden Gleichungen ausgedrückt:

$$\left. \begin{aligned} F_{bu}(\lambda, \kappa) &= -\frac{1}{2} \left\{ 1 + \gamma_u \left(1 + \frac{1}{\alpha_u} \right) \right\}^3 + (f_{1u} + g_{1u}) \frac{\psi_{1u}}{\varphi_u} + (f_{2u} + g_{2u}) \frac{\psi_{2u}}{\varphi_u} + f_{3u} \frac{\psi_{3u}}{\varphi_u} \\ G_{bu}(\lambda, \kappa) &= (f_{1u} + g_{1u}) \frac{\xi_{1u}}{\varphi_u} + (f_{2u} + g_{2u}) \frac{\xi_{2u}}{\varphi_u} + f_{3u} \frac{\xi_{3u}}{\varphi_u} + (f_{4u} + g_{4u}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

wobei

$$\begin{aligned} f_{1u} &= -\frac{K_{0u}}{k} \alpha_u \left(1 + \frac{1}{\gamma_u} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma_u}{\alpha_u} \right)^2 \left\{ 1 + \gamma_u \left(1 + \frac{1}{\alpha_u} \right) \right\} \\ g_{1u} &= -\varepsilon_b \left[2(1 + \alpha_u) \varepsilon_{2u} \left\{ 1 + \gamma_u \left(1 + \frac{1}{\alpha_u} \right) \right\} \left\{ \gamma_u^2 \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{\alpha_u} + \frac{1}{\alpha_u^2} \right) + \frac{K_{0u}}{k} \frac{\alpha_u}{\gamma_u} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \left\{ 1 + 2\gamma_u \left(1 + \frac{1}{\alpha_u} \right) + 2\gamma_u^2 \left(1 + \frac{1}{\alpha_u} \right)^2 \right\} \left\{ \gamma_u \left(\frac{1}{\alpha_u} + 3 + \frac{3}{2} \alpha_u \right) \varepsilon_{2u} + \frac{K_{0u}}{k} \frac{\alpha_u}{\gamma_u} \frac{1}{\varepsilon_{1u}} \right\} \right] \\ f_{2u} &= \left\{ 1 + \alpha_u \left(1 + \frac{1}{\gamma_u} \right) \right\} \frac{K_{0u}}{K_2} + \frac{3}{2} \frac{\gamma_u}{\alpha_u} (1 + \gamma_u) \left\{ 1 + \gamma_u \left(1 + \frac{1}{\alpha_u} \right) \right\} + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma_u}{\alpha_u} \right)^3 \\ g_{2u} &= -\varepsilon_b \left[6\varepsilon_{2u} (1 + \alpha_u) \left\{ 1 + \gamma_u \left(1 + \frac{1}{\alpha_u} \right) \right\} \left(\frac{1}{2} \gamma_u^2 - \frac{K_{0u}}{3K_2} \frac{\alpha_u}{\gamma_u} \right) \right. \\ &\quad \left. - \alpha_u \gamma_u \left(\frac{3}{2} \varepsilon_{2u} - \frac{K_{0u}}{K_2} \frac{1}{\gamma_u^2} \frac{1}{\varepsilon_{1u}} \right) \left\{ 1 + 2\gamma_u \left(1 + \frac{1}{\alpha_u} \right) + 2\gamma_u^2 \left(1 + \frac{1}{\alpha_u} \right)^2 \right\} \right] \\ f_{3u} &= \frac{1}{2} \gamma_u \left(1 + \frac{1}{\alpha_u} \right) \left\{ 3 + 3\gamma_u \left(1 + \frac{1}{\alpha_u} \right) + \gamma_u^2 \left(1 + \frac{1}{\alpha_u} \right)^2 \right\} \\ f_{4u} &= \left\{ 1 + \alpha_u \left(1 + \frac{1}{\gamma_u} \right) \right\} \frac{K_{0u}}{k} \\ g_{4u} &= -\varepsilon_b \left[\frac{K_{0u}}{k} \frac{\alpha_u}{\gamma_u} \frac{1}{\varepsilon_{1u}} \left\{ 1 + 2\gamma_u \left(1 + \frac{1}{\alpha_u} \right) + 2\gamma_u^2 \left(1 + \frac{1}{\alpha_u} \right)^2 \right\} - 2\varepsilon_{2u} (1 + \alpha_u) \frac{K_{0u}}{k} \left\{ 1 + \alpha_u \left(1 + \frac{1}{\gamma_u} \right) \right\} \right] \end{aligned}$$

3.2.2 Durchbiegung durch Schiebung

Aus Gl. (21) erhält man die Reaktionskräfte R_i ($i=1, 2, 3$), daher ist die Durchbiegung durch Schiebung mit Hilfe des Schiebkräftsbilds leicht zu berechnen.

Der Neigungswinkel durch Schiebung ist

$$\theta = m \frac{R_i}{AG}$$

Für die Durchbiegung an der 3 Teilstrecken der elastischen Linie gelten:

$$1. \text{ Bereich } w_{\theta 1} = -m \frac{R_{1u}}{AG} (L_u + p + l_{1u})$$

$$2. \text{ Bereich } w_{\theta 2} = -m \frac{R_{1u} + R_{2u}}{AG} (L_u + p)$$

$$3. \text{ Bereich } w_{\theta 3} = m \frac{P}{AG} L_u$$

Aus diesen Gleichungen erhält man als Durchbiegung an Kraftangriffsstelle folgende Gleichung:

$$w_s \max = w_{\theta 1} + w_{\theta 2} + w_{\theta 3} = m \frac{1}{AG} \{ -R_{1u} (L_u + p + l_{1u}) - (R_{1u} + R_{2u}) (L_u + p) + PL_u \} \dots\dots\dots (31)$$

Daher erhält man für die Durchbiegung $w_s \max$ die Gleichung (32):

$$K_{0u} w_s \max = F_{su}(\lambda, \kappa) P - G_{su}(\lambda, \kappa) Q \dots\dots\dots (32)$$

Hier wurden

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad K_{0u} = \frac{3EI}{L_u^3}$$

gesetzt.

Weiter sind

$$F_{su}(\lambda, \kappa) = \frac{1}{2} m(1+\nu) \varepsilon_{1u}^3 \left[-\frac{\psi_{1u}}{\varphi_u} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_{1u}} + (1+\alpha_u) \varepsilon_{2u} \right\} - \frac{1}{\varphi_u} (\psi_{1u} + \psi_{2u}) \left(\frac{1}{\varepsilon_{1u}} + \alpha_u \varepsilon_{2u} \right) + \frac{1}{\varepsilon_{1u}} \right]$$

$$G_{su}(\lambda, \kappa) = -\frac{1}{2} m(1+\nu) \varepsilon_{1u}^3 \left[\frac{\xi_{1u}}{\varphi_u} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_{1u}} + (1+\alpha_u) \varepsilon_{2u} \right\} + \frac{1}{\varphi_u} (\xi_{1u} + \xi_{2u}) \left(\frac{1}{\varepsilon_{1u}} + \alpha_u \varepsilon_{2u} \right) \right].$$

3.2.3 Zusätzliche Durchbiegung durch Bolzenlöcher

Zur Verbindung des Balkens mit der Unterlage ist es unvermeidbar, daß die Bolzenlöcher im Balken vorhanden sind.

Infolge der Bolzenlöcher wird die Biegesteife des Balkens vermindert, daher benutzt man zur Erklärung dieses Einflusses den zusätzlichen Durchbiegungswinkel $\Delta\theta$ an der vorderen Verbindungsschraube. Nun nimmt man an, daß sich der Durchbiegungswinkel mit abnehmendem Trägheitsmoment vergrößert. Für den zusätzlichen Durchbiegungswinkel gilt

$$\Delta\theta = \left(1 - \frac{I_{eq}}{I}\right) \theta_b \quad \dots\dots\dots (33),$$

wobei

θ_b = Durchbiegungswinkel am $x = l_{2u}$ bei der Vernachlässigung der Bolzenlöcher (vgl. Gl. 18) und I_{eq} = Durchschnitt-Trägheitsmoment mit der Bolzenlöcher sind.

Die Durchschnittsträgheitsmoment wird aus Bild 5 berechnet. Für die Breite des Lochs an Koordinate X gilt

$$B_0 = 2Y = 2\sqrt{r_1^2 - X^2}.$$

Daraus folgt

$$I_{eq} = \int_{-r_1}^{r_1} I_x \frac{1}{r_1} dX.$$

Hierbei ist

$$I_x = \frac{2 \left(\frac{B}{2} - \sqrt{r_1^2 - X^2} \right) h^3}{12}.$$

Daher ist

$$I_{eq} = I \left(1 - \frac{\pi d_1}{4b} \right) \quad \dots\dots\dots (34).$$

Bild 5

Aus Gl. (7) und Gl. (33) erhält man für die Durchbiegung durch den zusätzlichen Durchbiegungswinkel die folgende Gleichung:

$$K_{0u} w_{\theta \max} = F_{\theta u}(\lambda, \kappa) P - G_{\theta u}(\lambda, \kappa) Q \quad \dots\dots\dots (35).$$

Hierbei zeigen die Funktion $F_{\theta u}(\lambda, \kappa)$ und $G_{\theta u}(\lambda, \kappa)$ den Einfluß der vorhandenen Bolzenlöcher auf die Durchbiegung und werden mit nachfolgenden Gleichungen bestimmt:

$$F_{\theta u}(\lambda, \kappa) = 3(1 - \varepsilon_{eq}) \left[\left\{ \frac{1}{6} \left(\frac{\gamma_u}{\alpha_u} \right)^2 - \frac{K_{0u}}{3k} \frac{\alpha_u}{\gamma_u} \right\} \frac{\psi_{1u}}{\varphi_u} + \left(\frac{K_{0u}}{3K_2} \frac{\alpha_u}{\gamma_u} + \frac{\gamma_u^2}{\alpha_u} \right) \frac{\psi_{2u}}{\varphi_u} + \frac{1}{2} \gamma_u^2 \left(1 + \frac{1}{\alpha_u} \right)^2 \frac{\psi_{3u}}{\varphi_u} - \frac{1}{2} \gamma_u^2 \left(1 + \frac{1}{\alpha_u} \right)^2 \right]$$

$$G_{\theta u}(\lambda, \kappa) = 3(1 - \varepsilon_{eq}) \left[\left\{ \frac{1}{6} \left(\frac{\gamma_u}{\alpha_u} \right)^2 - \frac{K_{0u}}{3k} \frac{\alpha_u}{\gamma_u} \right\} \frac{\xi_{1u}}{\varphi_u} + \left(\frac{K_{0u}}{3K_2} \frac{\alpha_u}{\gamma_u} + \frac{\gamma_u^2}{\alpha_u} \right) \frac{\xi_{2u}}{\varphi_u} + \frac{1}{2} \gamma_u^2 \left(1 + \frac{1}{\alpha_u} \right)^2 \frac{\xi_{3u}}{\varphi_u} + \frac{K_{0u}}{3k} \frac{\alpha_u}{\gamma_u} \right].$$

Hier wurde

$$\varepsilon_{eq} = \frac{I_{eq}}{I}$$

gesetzt.

3.2.4 Statische Biegesteifigkeit an der oberen Biegestelle

Aus Gl. (29), Gl. (32) und Gl. (35) kann man die statische Biegesteifigkeit an der oberen Biegestelle berechnen.

Für die statische Biegesteifigkeit gilt

$$K_{bu} = \frac{K_{0u}}{F_u(\lambda, \kappa) - G_u(\lambda, \kappa) \frac{Q}{P}} \quad \dots\dots\dots (36)$$

mit

$$F_u(\lambda, \kappa) = F_{bu}(\lambda, \kappa) + F_{su}(\lambda, \kappa) + F_{\theta u}(\lambda, \kappa)$$

$$G_u(\lambda, \kappa) = G_{bu}(\lambda, \kappa) + G_{su}(\lambda, \kappa) + G_{\theta u}(\lambda, \kappa).$$

3.3 Analyse der statischen Biegesteifigkeit an der unteren Biegestelle

An der unteren Biegestelle wird die Unterlage-secke als die vordereste Stütze dargestellt, wie in Bild 3 mit Bezeichnung # 3 gezeigt.

Deshalb sind nur zwei Größen, die Durchbiegungen durch das Biegen und diejenige durch Schiebung, zur Berechnung der Biegesteifigkeit zu berücksichtigen.

Unter der Voraussetzung der folgenden Randbedingungen kann man die statische Biegesteifigkeit an der unteren Biegestelle mit Hilfe der gleichen Berechnungsmethode wie an der oberen Biegestelle ermitteln.

Randbedingungen:

- 1) für $x=0$ folgt $w_{x=0} = -\frac{R_{1d}}{K_1} + \frac{Q}{k}$
- 2) für $x=p$ folgt

- a) $w_{x=p} = -\frac{R_{2d}}{K_2} + \frac{Q}{k}$
 b) $w_{Ber1} = w_{Ber2}$
 c) $\left(\frac{dw}{dx}\right)_{Ber1} = \left(\frac{dw}{dx}\right)_{Ber2}$
 3) für $x=l_{2d}$ folgt
 a) $w_{x=l_{2d}} = -\frac{R_{3d}}{k_{edg0}}$
 b) $w_{Ber2} = w_{Ber3}$
 c) $\left(\frac{dw}{dx}\right)_{Ber2} = \left(\frac{dw}{dx}\right)_{Ber3}$

Nach einigen Umformung ergibt sich für die statische Biegesteifigkeit

$$K_{bd} = \frac{K_{0d}}{F_d(\lambda, \kappa) - G_d(\lambda, \kappa) \frac{Q}{P}} \dots (37)$$

mit $F_d(\lambda, \kappa) = F_{bd}(\lambda, \kappa) + F_{sd}(\lambda, \kappa)$
 $G_d(\lambda, \kappa) = G_{bd}(\lambda, \kappa) + G_{sd}(\lambda, \kappa)$.

In Gl. (37) zeigen die Funktionen $F_{bd}(\lambda, \kappa)$ und $G_{bd}(\lambda, \kappa)$ den Einfluß der Durchbiegung durch das Biegen. Ferner zeigen die Funktionen $F_{sd}(\lambda, \kappa)$ und $G_{sd}(\lambda, \kappa)$ derjenigen durch die Schiebung.

Für diese Funktionen gelten

$$F_{bd}(\lambda, \kappa) = -\frac{1}{2} \left\{ 1 + \gamma_d \left(1 + \frac{1}{\alpha_d} \right) \right\}^3 + f_{1d} \frac{\psi_{1d}}{\varphi_d} + f_{2d} \frac{\psi_{2d}}{\varphi_d} + f_{3d} \frac{\psi_{3d}}{\varphi_d}$$

$$G_{bd}(\lambda, \kappa) = f_{1d} \frac{\xi_{1d}}{\varphi_d} + f_{2d} \frac{\xi_{2d}}{\varphi_d} + f_{3d} \frac{\xi_{3d}}{\varphi_d} + f_{4d}$$

$$F_{sd}(\lambda, \kappa) = \frac{1}{2} m(1+\nu) \varepsilon_{1d}^3 \left[\left\{ \frac{1}{\varepsilon_{1d}} + (1+\alpha_d) \varepsilon_{2d} \right\} \frac{\psi_{1d}}{\varphi_d} - \left(\frac{1}{\varepsilon_{1d}} + \varepsilon_{2d} \right) \frac{\psi_{3d}}{\varphi_d} - \varepsilon_{2d} \right]$$

$$G_{sd}(\lambda, \kappa) = \frac{1}{2} m(1+\nu) \varepsilon_{1d}^3 \left[\left\{ \frac{1}{\varepsilon_{1d}} + (1+\alpha_d) \varepsilon_{2d} \right\} \frac{\xi_{1d}}{\varphi_d} - \left(\frac{1}{\varepsilon_{1d}} + \varepsilon_{2d} \right) \frac{\xi_{3d}}{\varphi_d} \right].$$

Hierbei sind

$$\varphi_d = \frac{1}{K_1} \frac{1}{\alpha_d^2} + \left(1 + \frac{1}{\alpha_d} \right)^2 \frac{1}{K_2} + \frac{1}{k_{edg0}} + \frac{1}{K_{0d}} \left(\frac{\gamma_d}{\alpha_d} \right)^3 (1 + \alpha_d)$$

$$\psi_{1d} = -(\varphi_d + \psi_{2d} + \psi_{3d})$$

$$\xi_{1d} = -(\xi_{2d} + \xi_{3d})$$

$$\psi_{2d} = \frac{1}{K_1} \frac{\alpha_d^3}{\gamma_d} - \left\{ 1 + \left(\frac{1}{\alpha_d} + \frac{1}{\gamma_d} \right) \right\} \frac{1}{k_{edg0}} + \frac{1}{2K_{0d}} \left(\frac{\gamma_d}{\alpha_d} \right)^2 \left(3 + \frac{1}{\alpha_d} + 2\alpha_d \right)$$

$$\xi_{2d} = -\left(1 + \frac{1}{\alpha_d} \right) \frac{1}{k}$$

$$\psi_{3d} = -\frac{1}{K_1} \left(\frac{1}{\alpha_d} \right)^2 \left(1 + \frac{\alpha_d}{\gamma_d} \right) - \left(1 + \frac{1}{\alpha_d} \right) \left\{ 1 + \left(\frac{1}{\alpha_d} + \frac{1}{\gamma_d} \right) \right\} \frac{1}{K_2} - \frac{1}{2K_{0d}} \left(\frac{\gamma_d}{\alpha_d} \right)^2 \left\{ (3 + 2\alpha_d) + 2 \frac{\gamma_d}{\alpha_d} (1 + \alpha_d) \right\}$$

$$\xi_{3d} = \frac{1}{k}$$

$$f_{1d} = -\frac{K_{0d}}{K_1} - \left\{ 1 + \frac{\gamma_d}{\alpha_d} (1 + \alpha_d) \right\} \left\{ -\frac{K_{0d}}{K_1} \frac{1}{\gamma_d} + \frac{1}{2} \gamma_d^2 \right\}$$

$$f_{2d} = -\frac{3}{2} \gamma_d \left\{ 1 + \frac{\gamma_d}{\alpha_d} (1 + \alpha_d) \right\}^2 + \left\{ 1 + \frac{\gamma_d}{\alpha_d} (1 + \alpha_d) \right\} \left\{ \frac{3}{2} \gamma_d^2 - \frac{K_{0d}}{K_2} \frac{1}{\gamma_d} \right\} - \frac{1}{2} \gamma_d^3$$

$$f_{3d} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\gamma_d}{\alpha_d} \right)^3 (1 + \alpha_d)^3 + \frac{3}{2} \left(\frac{\gamma_d}{\alpha_d} \right)^2 (1 + \alpha_d)^2 \left\{ 1 + \frac{\gamma_d}{\alpha_d} (1 + \alpha_d) \right\} - \frac{3}{2} \left(\frac{\gamma_d}{\alpha_d} \right) (1 + \alpha_d) \left\{ 1 + \left(\frac{\gamma_d}{\alpha_d} \right) (1 + \alpha_d) \right\}^2$$

$$f_{4d} = -\frac{K_{0d}}{k}$$

Außerdem gelten für jede Reaktionskräfte

$$R_{1d} = \frac{1}{\varphi_d} (\psi_{1d} P - \xi_{1d} Q), \quad R_{2d} = \frac{1}{\varphi_d} (\psi_{2d} P - \xi_{2d} Q), \quad R_{3d} = \frac{1}{\varphi_d} (\psi_{3d} P - \xi_{3d} Q) \dots (38).$$

Hier wurden

$$K_{0d} = \frac{3EI}{L_d^3}, \quad \alpha_d = \frac{p}{l_{1d}}, \quad \gamma_d = \frac{p}{L_d}, \quad \varepsilon_{1d} = \frac{h}{L_d}, \quad \varepsilon_{2d} = \frac{l_{1d}}{h}$$

gesetzt.

3.4 Theoretischer Geltungsbereich der Gleichungen von der statischen Biegesteifigkeit

Bei der Berechnung der statischen Biegesteifigkeit wird die Gleichung (36) oder (37) benutzt, und dabei ist es nötig, daß man die Federsteifigkeit der Stütze unter Berücksichtigung der Richtung von der Reaktionskraft bestimmt. Daher werden der Biegekräfte- und der Vorspannkraftswert durch das Vorzeichen der Reaktionskraft begrenzt.

Weiter muß man die Bedingungen, daß die Reaktionskraft die Elastizitätsgrenze der Verbindungsschraube nicht übersteigt und die Biegesteifigkeit des verschraubten Balkens nicht die des virtuellen Kragbalkens

übersteigt, berücksichtigen. Bezeichnet man die Elastizitätsgrenze der Schraube mit σ_e , so erhält man

$$P_e = \frac{1}{4} \pi d^2 \sigma_e.$$

Damit die Elastizitätsgrenze der Verbindungsschraube nicht überschritten wird, muß $P_e \geq R_i$ sein. Mit Hilfe von Gl. (21) und Gl. (38) erhält man

$$P \leq \frac{\varphi}{\psi_i} \sigma_e \frac{1}{4} \pi d^2 - \frac{\xi_i}{\psi_i} Q \quad (i=1, 2, 3)$$

für

$$K_b \leq K_0, \quad P \geq \frac{G(\lambda, \kappa)}{1-F(\lambda, \kappa)} Q.$$

Daher gilt für den theoretischen Geltungsbereich von Gl. (36) und Gl. (37)

$$\frac{G(\lambda, \kappa)}{1-F(\lambda, \kappa)} Q \leq P \leq \frac{\varphi}{\psi_i} \sigma_e \frac{1}{4} \pi d^2 - \frac{\xi_i}{\psi_i} Q \quad \dots (39).$$

An der oberen Biegestelle kommt die dritte Stütze ($i=3$) zur Frage, und an der unteren Biegestelle die erste Stütze ($i=1$).

4. Federkonstante von der Verbindungsschraube, Unterlage und Unterlage-secke

4.1 Federkonstante der Verbindungsschraube k_b

Die Dehnung der Verbindungsschraube wird durch die Hohlgewindetiefe, die Genauigkeitsordnung der Passung zwischen der Schraube und dem Hohlgewinde, die Senkrechtheit zwischen dem Kopf und dem Schaft, u.s.w., beeinflusst.

Aber man behandelt hier die Verbindungsschraube, die sich zwischen der Unterlagefläche und dem Schraubenkopf ausdehnt, wie in Bild 6 gezeigt.

Mit

d = Schraubendurchmesser am Schaft,

h = Dicke des Balkens,

der Zugspannung am Schaft

$$\sigma = E_b \varepsilon$$

und der Zugverzerrung $\varepsilon = \Delta h / h$, wird die Dehnung Δh wie folgt dargestellt:

Bild 6

$$\Delta h = \frac{h}{E_b} \frac{Q_0}{\frac{1}{4} \pi d^2}.$$

Hierbei Q_0 ist die Zugkraft.

Daher erhält man für die Federkonstante der Verbindungsschraube die folgende Gleichungen:

$$k_b = \frac{\pi E_b d^2}{4h} \quad \dots (40).$$

4.2 Federkonstante der Unterlage k und der Unterlagesecke k_{edge}

Nach den Versuchsergebnissen von Thornley⁽²⁾ wird die Federkonstante der Unterlage durch die elastische Verschiebung der Unterlage viel stärker als durch die Verformung der Unterlagefläche beeinflusst, wenn die Kontaktpressung einwirkt, wie bei der verschraubten Fuge.

Daher nimmt man an, daß die Federkonstante der Unterlage durch die örtliche Verschiebung des Balkens und der Unterlage bestimmt wird.

Die örtliche Verschiebung wird aus der Verschiebung des halbbunendlichen Körpers berechnet, und in Bild 7 ist die Erklärung dieser Stelle dargestellt.

Die konzentrierte Kraft P_0 wird an das halbbunendliche elastische Gestell angelegt, dann entstehen die Spannung und die Verschiebung in r - und z -Richtung.

Zur Berechnung der Federkonstante nimmt man wie folgt an:

(1) Auf die Federkonstante haben nur die Spannung und die Verschiebung in z -Richtung den Einfluß.

(2) Die äquivalente Federkonstante von der Unterlage K_{eq} wird durch die Walze mit Radius a und Länge L , die die örtliche, große Verformung aufweist, bestimmt.

Weiter zeigt diese Walze sich die konstante Federkonstante, trotzdem die Spannung und die Verschiebung dieser Walze mit der Funktion über r und z ergeben werden.

Stellt man sich in dieser Walze, ein winziges Volumen mit den Längen von $r d\theta$, dr und dz , wie in Bild 7 gezeigt, vor, so wird für die in diesem

Bild 7

Volumen behaltene Leistung die folgende Gleichung abgeleitet:

$$E_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{L_B} \sigma_z r d\theta dr \frac{\partial w_z}{\partial z} dz$$

wobei σ_z = die Spannung in z -Richtung und w_z = die Verschiebung in z -Richtung sind.

Nach der Analyse von Boussinesq⁽³⁾ gelten für die Spannung σ_z und das Differential der Verschiebung $\frac{\partial w_z}{\partial z}$,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{3P_0}{2\pi} z^3 (r^2 + z^2)^{-5/2} \\ \frac{\partial w_z}{\partial z} &= \frac{P_0}{2\pi E} [3(1+\nu)r^2 z (r^2 + z^2)^{-5/2} - \{3+\nu(1-2\nu)\} z (r^2 + z^2)^{-3/2}] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (41).$$

Durch Einsetzen der Gl. (41) in die Gleichung von Leistung E_1 ergibt sich

$$E_1 = 2\pi \int_0^a \int_0^{L_B} r \frac{3P_0}{2\pi} z^3 (r^2 + z^2)^{-5/2} \frac{P_0}{2\pi E} [3(1+\nu)r^2 z (r^2 + z^2)^{-5/2} - \{3+\nu(1-2\nu)\} z (r^2 + z^2)^{-3/2}] dr dz.$$

Nach einigen Umformungen erhält man für die Leistung

$$E_1 = \frac{3P_0^2}{2\pi E} \Phi(a, L_B) \dots\dots\dots (42).$$

Hier wurde

$$\begin{aligned} L_B \Phi(a, L_B) &= \frac{1}{8}(1+\nu) \left[-1 + \frac{7+24(a/L_B)^2+9(a/L_B)^4}{16\{1+(a/L_B)^2\}^3} - \frac{9}{16} \left(\frac{L_B}{a} \right) \tan^{-1} \frac{L_B}{a} \right] \\ &\quad - \frac{1}{6}\{3+\nu(1-2\nu)\} \left[-1 + \frac{5+3(a/L_B)^2}{8\{1+(a/L_B)^2\}^2} - \frac{3}{8} \left(\frac{L_B}{a} \right) \tan^{-1} \frac{L_B}{a} \right] \dots\dots\dots (43) \end{aligned}$$

gesetzt.

Zieht man eine äquivalente Walze, die die gleiche Länge und einen anderen Durchmesser hat, in Betracht, und setzt man die Leistung, die in dieser Walze bei der gleichmäßigen Verschiebung von δ_m behalten wird, mit der aus Gl. (43) ergebenden Leistung gleich, so bekommt man für die Federkonstante K_{eq}

$$\begin{aligned} \frac{3P_0^2}{2\pi E} \Phi(a, L_B) &= \frac{1}{2} K_{eq} \delta_m^2 = \frac{1}{2} \frac{P_0^2}{K_{eq}} \\ K_{eq} &= \frac{\pi E}{3\Phi(a, L_B)} \end{aligned}$$

Wie schon erwähnt, ergibt sich die Federung der Unterlage aus dem Kontakt zwischen der Unterlage und dem Balken. An dieser Kontaktstelle wird die Balkensecke als durch eine konzentrierte Kraft belasteter, viertelunendlicher Körper angesehen, wenn die örtliche Verschiebung des Balkens, der der Unterlage gleich ist.

Nimmt man an, daß die Federkonstante in diesem Balken den halben Wert der Federkonstante K_{eq} beträgt, so kann man die Federkonstante der Unterlage unter Berücksichtigung der Reihenkopplung der Federn wie folgt berechnen.

$$k = \frac{1}{3} K_{eq} = \frac{\pi E}{9\Phi(a, L_B)} \dots\dots\dots (44).$$

Hier zeigt man beispielsweise die rechnerische Federkonstante der Unterlage aus Stahl.

Aus Gl. (41) kann man die Verschiebung w_z der durch die konzentrierte Einheitskraft P_0 angegriffenen halbumendlichen Unterlagefläche berechnen.

Die Ergebnisse sind in Bild 8 dargestellt. Aus Bild 8 ist zu entnehmen, daß die örtliche Verschiebung bei $a=5$ mm und $L_B=5 \sim 8$ mm entsteht.

Daher erhält man mit Hilfe von Gl. (42) und Gl. (44) die Federkonstante der Unterlage

$$k = 100 \sim 150 \text{ kp}/\mu\text{m}.$$

Gleichung (44) gilt auch für die Federkonstante der Unterlagesecke, weil der Kontaktszustand an der Unterlagesecke ungefähr gleich dem an der oben erwähnten Kontaktstelle ist. Diese Federkonstante wird deshalb aus Gl. (44) wie folgt berechnet:

$$k_{edge} = 100 \sim 150 \text{ kp}/\mu\text{m}.$$

Zur Bestätigung der Gl. (44) wurden die Federkonstanten k und k_{edge} mit Hilfe des Versuchsergebnisses nach Gl. (36) und Gl. (37) berechnet. Die experimentell ermittelten Werte waren

$$k = 100 \sim 140 \text{ kp}/\mu\text{m} \text{ und } k_{edge} = 50 \sim 70 \text{ kp}/\mu\text{m}.$$

Die aus dem Versuch gewonnene Federkonstante der Unterlage ist mit der theoretisch berechneten in guter Übereinstimmung aber die Federkonstante der Unterlagesecke stimmt mit dem theoretischen Werte nicht überein.

Bild 8 Verschiebung in Z -Richtung der durch die konzentrierte Kraft P_0 angegriffenen halbumendlichen Unterlagefläche
 $E = 2.1 \times 10^4 \text{ kp}/\text{mm}^2$ (Werkstoff: Stahl)

Die Ursache dieser Tendenz wird nach der Vergleich mit oberen Biegestelle, wie folgend erwähnt, auseinandergesetzt.

An der unteren Biegestelle kann man sich leicht vorstellen, daß die Einflußgrößen die Biegeverschiebung und die Rundung an der Unterlagesecke, u.s.w., auf die Durchbiegung an der Angriffsstelle der Biegekraft sehr stark einwirken. Aus diesem Grund beträgt die scheinbare Federkonstante der Unterlagesecke den kleineren Wert.

Schließlich ist es gewünscht, die genaue Berechnungsmethode von diesen Federkonstanten während der Weiterentwicklung dieser Untersuchung zu finden.

Hier wurde nicht diese Frage behandelt, aber wollten wir über diese Frage zu einem spätern Zeitpunkt berichten.

5. Zusammenfassung

Im diesem Referat sind das Modell der verschraubten Fugen für die Berechnung und die Methode

der theoretischen Analyse über die statische Biegesteifigkeit der verschraubten Fugen beschrieben.

Bei der Untersuchung wurde die experimentelle Ergebnisse, die die allgemeine, statische Biegesteifigkeitskennlinie von der verschraubten Fugen erklärt hatten⁽¹⁾, benutzt.

Aus der rechnerischen Untersuchung ging hervor, daß die statische Biegesteifigkeit des mit zwei Verbindungsschrauben einseitig verschraubten Kragbalkens durch Gl. (36) und Gl. (37) bestimmt werden.

Die Vergleichsergebnisse zwischen dem rechnerischen Wert und dem experimentellen werden im zweiten Teil zeigen.

Schrifttum

- (1) M. Masuko et al.: *Bulletin of JSME*, Vol. 12, No. 49 (1968), p. 122.
- (2) R. H. Thornley et al.: *Int. Jour. Mach. Tool. Des. Res.*, Vol. 5, No. 1/2 (1965), p. 57.
- (3) Timoshenko and Goodier: *Theory of Elasticity*, (1951), p. 343, McGraw-Hill.