層板構造を有する単体骨梁内部における 間質液流れの多孔質弾性解析

Poroelastic Analysis of Interstitial Fluid Flow in a Single Trabecula with Lamellar Structure

正 ○亀尾 佳貴 (阪府大)
正 石原 正行 (阪府大)

正 大多尾 義弘 (阪府大)

Yoshitaka KAMEO, Graduate School of Engineering, Osaka Prefecture University
1-1 Gakuen-cho, Naka-ku, Sakai-shi, Osaka

Yoshihiro OOTAO, Graduate School of Engineering, Osaka Prefecture University
Masayuki ISHIHARA, Graduate School of Engineering, Osaka Prefecture University

Key words : Trabecula, Interstitial fluid flow, Lamellar structure, Poroelasticity

1. 緒言

海綿骨の微視構造要素である骨梁は、発達した層板構造を有する多孔質体であり、生体内において歩行運動や姿勢維持等に起因する繰返し荷重を受けている。このような力学的負荷にともない、骨梁内部の骨小腔－骨細管系内に生じる間質液の流れは、骨細胞の力学刺激感知過程において重要な役割を担っていると考えられている⁽¹⁾。

骨梁を構成する各層板は、その形成時期に依存して異なる材料特性を有している。そこで本研究では、流体の浸透しやすさの指標である透水係数の値が各層で異なる状況を想定し、単体骨梁を多層多孔質弾性体としてモデル化することにより、繰返し荷重下における間質液の力学的振舞いを理論的に解析する。

2. 解析方法

層板構造を有する単体骨梁モデルとして、Fig. 1 に示すように、 n 層から成る多層多孔質弾性体を考える。幅 L を持つ本モデルは、上下端を不透水性の剛体板で挟みこまれ、それらを介して、振幅 σ_0 、角周波数 ω の繰返し単軸荷重を受けている。各層は等方的な材料特性を有し、各種材料定数のうち透水係数 k のみが異なる。以下では、 i 番目の層の材料特性を添え字 i により区別する。また、第 i 層の幅を l_i とし、全体座標 x と局所座標 x_i とを Fig. 1 のように設定する。

多孔質弾性論に基づくと、物体の応力 σ_{ij} と流体圧 p は、次の拡散方程式とひずみの適合方程式を満足する。

$$c \nabla^2 \left(\sigma_{kk} + \frac{3}{B} p \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\sigma_{kk} + \frac{3}{B} p \right) \quad (1)$$

$$\nabla^2 \left[\sigma_{kk} + \frac{2\alpha(1-2\nu)}{(1-\nu)} p \right] = 0 \quad (2)$$

ここで、定数 c は透水係数 k に比例する拡散係数、 B は Skempton 係数、 α は Biot-Willis 係数、 ν は排水 Poisson 比である。骨梁の力学解析では、ひずみの適合方程式(2)において、流体圧 p を含む項の影響を無視することができる⁽²⁾。そこで、平面応力状態を仮定して $\sigma_{xx} = \sigma_{zz} = 0$ 、 $\sigma_{yy} = -\sigma_0 \sin \alpha x$ とし、式(2)を式(1)に代入すると、各層内の流体圧 p_i は、拡散方程式、

$$c_i \frac{\partial^2 p_i}{\partial x_i^2} = \frac{\partial p_i}{\partial t^*} - \Omega \cos \Omega t^* \quad (3)$$

に従う。また、表面 $x = 0, L$ での排水状態を仮定し、各層境界面での流体圧と流束の連続性を考慮すると、初期条件および境界条件は、次式のように表される。

$$t^* = 0; \quad p_i = 0 \quad (i = 1 \sim n) \quad (4)$$

$$x_1^* = 0; \quad p_1^* = 0 \quad (5)$$

$$x_i^* = l_i^*; \quad x_{i+1}^* = 0; \quad (6)$$

$$p_i^* = p_{i+1}^*; \quad c_i \frac{\partial p_i^*}{\partial x_i^*} = c_{i+1} \frac{\partial p_{i+1}^*}{\partial x_{i+1}^*} \quad (i = 1 \sim n-1)$$

$$x_n^* = l_n^*; \quad p_n^* = 0 \quad (7)$$

ただし、式(3)-(7)において、以下の無次元数を導入した。

$$x_i^* \equiv \frac{x_i}{L}, \quad t^* \equiv \frac{c_0 t}{L^2}, \quad p_i^* \equiv \frac{p_i}{B \sigma_0 / 3}, \quad (8)$$

$$l_i^* \equiv \frac{l_i}{L}, \quad c_i^* \equiv \frac{c_i}{c_0} = \frac{k_i}{k_0}, \quad \Omega \equiv \frac{L^2 \omega}{c_0}$$

ここで、定数 c_0 、 k_0 はそれぞれ基準となる拡散係数、透水係数を意味する。

Fig.1 Model of trabecula with lamellar structure.

条件式(4)-(7)の下で、拡散方程式(3)を無次元時間 t^* に関するラプラス変換により解く。ラプラス変換をチルダ記号($\sim$)で表し、初期条件(4)を用いると、式(3)の解は、

$$\tilde{p}_i^* = A_i \cosh \sqrt{\frac{s}{c_i^*}} x_i^* + B_i \sinh \sqrt{\frac{s}{c_i^*}} x_i^* + \frac{\Omega}{s^2 + \Omega^2} \quad (9)$$

と表される。ただし、 $2n$ 個の未定変数 A_i 、 B_i は共に境界条件(5)-(7)より決定される。式(5)-(7)をラプラス変換した後、式(9)を代入し、これらを行列形式で表示すると、

$$[a_{kl}] \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ \vdots \\ A_n \\ B_n \end{Bmatrix} = \frac{\Omega}{s^2 + \Omega^2} \begin{Bmatrix} f_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_{2n} \end{Bmatrix} \quad (k, l = 1 \sim 2n) \quad (10)$$

ここで、 a_{kl} , f_k の非零成分は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1 \\ a_{2i,2i-1} &= \cosh \sqrt{\frac{s}{c_i}} l_i^*, \quad a_{2i,2i} = \sinh \sqrt{\frac{s}{c_i}} l_i^*, \quad a_{2i,2i+1} = -1 \\ a_{2i+1,2i-1} &= \sqrt{c_i s} \sinh \sqrt{\frac{s}{c_i}} l_i^*, \quad a_{2i+1,2i} = \sqrt{c_i s} \cosh \sqrt{\frac{s}{c_i}} l_i^*, \\ a_{2i+1,2i+1} &= -\sqrt{c_{i+1} s} \quad (i=1 \sim n-1) \\ a_{2n,2n-1} &= \cosh \sqrt{\frac{s}{c_n}} l_n^*, \quad a_{2n,2n} = \sinh \sqrt{\frac{s}{c_n}} l_n^* \\ f_1 &= -1, \quad f_{2n} = -1 \end{aligned} \quad (11)$$

上式をクラメルの公式を用いて解くと、ラプラス変換された流体圧 $\tilde{p}_i^*$ は、

$$\tilde{p}_i^* = \frac{\Omega}{\Delta(s^2 + \Omega^2)} \left(\bar{A}_i \cosh \sqrt{\frac{s}{c_i}} x_i^* + \bar{B}_i \sinh \sqrt{\frac{s}{c_i}} x_i^* + \Delta \right) \quad (12)$$

と表される。ここで、 Δ は式(10)中の係数行列 $[a_{kl}]$ の行列式であり、 $\bar{A}_i$ および $\bar{B}_i$ はそれぞれ係数行列 $[a_{kl}]$ の $2i-1$ 列目、 $2i$ 列目を定数ベクトル $\{f_k\}$ で置換した行列の行列式である。上式を、留数定理を用いて逆変換することにより、無次元流体圧 p_i^* に関する理論解が導出される。

3. 結果

骨梁に関する材料定数として、粘性係数 $\mu = 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ 、せん断弾性係数 $G = 5.94 \text{ GPa}$ 、排水 Poisson 比 $\nu = 0.325$ 、固相の体積弾性係数 $K_s = 17.7 \text{ GPa}$ 、液相の体積弾性係数 $K_f = 2.3 \text{ GPa}$ 、孔隙率 $\phi = 0.05$ 、透水係数の基準値 $k_0 = 1.1 \times 10^{-21} \text{ m}^2$ と設定した⁽³⁾。以上 7 つの独立な材料定数より、既出の各定数の値は、Biot-Willis 係数 $\alpha = 0.15$ 、Skempton 係数 $B = 0.35$ 、拡散係数の基準値 $c_0 = 3.9 \times 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$ と導かれる。したがって、生体内において骨梁に負荷される荷重周波数を 1~10 Hz 程度とし、骨梁径を $L = 200 \mu\text{m}$ とすると、無次元周波数 Ω は、およそ 6.4~64 と導出される。そこで本研究では、 Ω の値を 1, 10, 100 の 3 通りに設定した。骨梁内における透水係数の分布が間質液の力学的振舞いに及ぼす影響について検討するため、骨梁が同じ幅を持つ 6 層の層板から成ると想定し、

各荷重周波数下において、骨梁表面の透水係数が内部よりも大きい場合：Case 1 ($c_1^* = c_6^* = 2.0$, $c_2^* = c_5^* = 1.5$, $c_3^* = c_4^* = 1.0$) と、小さい場合：Case 2 ($c_1^* = c_6^* = 1.0$, $c_2^* = c_5^* = 1.5$, $c_3^* = c_4^* = 2.0$) について、それぞれ流体圧変化を解析した。

無次元周波数 Ω の値を 1, 10, 100 と変化させたときの、 x 軸方向に沿った流体圧分布を Figs. 2-4 に示す。各グラフは、定常状態において、繰返し荷重 1 周期中の異なる 8 位相における流体圧分布を示している。また、各図の Fig. (a), (b) は、それぞれ透水係数分布 Case 1, Case 2 に関する流体圧の挙動を示している。

4. 考察

骨梁内における間質液の浸透流速の指標として、流体圧の空間勾配に着目する。Figs. 2-4 に示すように、すべての条件下において、間質液の流体圧勾配は、骨梁内部よりも表面付近の方が大きく、無次元周波数 Ω の増加とともに増大することが示された。さらに、各荷重周波数下において、Fig. (a) と Fig. (b) を比較し、透水係数分布の相違による影響を調べると、骨梁表面の透水係数値が小さい Case 2 の方が、Case 1 よりも表面付近で顕著な流体圧勾配が発生しており、間質液流れを介した骨細胞への力学刺激付与に大きく貢献している可能性が示唆された。

5. 結 言

本研究では、層板構造を有する単体骨梁を、各層で透水係数が異なる多層多孔質弾性体としてモデル化し、繰返し単軸荷重下における間質液の力学的振舞いを理論的に解析した。その結果、荷重周波数が一定であれば、骨梁内部に比べ表面の透水係数値が小さい方が、より顕著な間質液流れが発生することが示された。

本研究は、一部、科学研究費補助金若手 B(25820011) の援助を受けた。記して謝意を表する。

参考文献

- (1) Weinbaum, S. et al. (1994) J. Biomech. 27:339-360.
- (2) Kameo, Y. et al. (2008) J. Mech. Phys. Solids 56:1794-1805.
- (3) Smit, T.H. et al. (2002) J. Biomech. 35:829-835.

Fig.2 Fluid pressure distribution for $\Omega = 1$. Fig.3 Fluid pressure distribution for $\Omega = 10$. Fig.4 Fluid pressure distribution for $\Omega = 100$.