319 直交異方性不均質長方形板の熱弾性解析

Thermoelastic Analysis of an Orthotropic, Nonhomogeneous Rectangular Plate

正 谷川 義信 (阪府大工)

○ 学 黄 得天 (阪府大院)

Yoshinobu TANIGAWA, Osaka Prefecture University, 1-1, Gakuen-cho, Sakai, Osaka

Tokuten KOU, Graduate Student, Osaka Prefecture University

Key Words : Orthotropic material, Nonhomogeneous material, Rectangular plate, Thermal deformation, Thermal stress

1. 緒言

本研究は、面内方向に関して直交異方性をもち、更に板厚方向に関して不均質な材料物性を持つ長方形板を解析モデルとして取り上げ、非一様な加熱を受ける場合の熱弾性挙動の理論解析及び数値シミュレーションを行ったものである。特に、厚さ方向に関する不均質性が熱弾性解(たわみ、モーメントなど)に及ぼす影響について検討した。

2. 解析モデル

図1に示すように、 x 方向の長さが a 、 y 方向の長さが b 、厚さ h の長方形板を考える。簡単化のため、 x 軸、 y 軸に関して対称な問題を想定し、板の上面と下面から非一様な加熱を受ける場合の定常問題について考える。また、直交異方性の主軸は、 x 軸、 y 軸と一致している場合を想定する。

Fig.1 Analytical Model

3. 解析方法

3.1 温度解析 直交異方性不均質長方形板の三次元定常熱伝導の方程式は、内部熱発生のない場合、次式で与えられる。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \lambda_x(z) \frac{\partial T}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \lambda_y(z) \frac{\partial T}{\partial y} \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \lambda_z(z) \frac{\partial T}{\partial z} \right\} = 0 \quad (1)$$

ここで $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ はそれぞれ x, y, z 方向に関する熱伝導率、 T は温度変化、 z は図1に示すように中立面から測った板厚方向座標である。加熱条件として、板の上面($z=0$)が $T_a f(x, y)$ 、下面($z=h$)が $T_b g(x, y)$ の媒体により相対熱伝導率 h_a, h_b で加熱される場合を想定する。更に簡単化のため、板の周辺境界上($x = \pm a/2, y = \pm b/2$)は零度に保持されると仮定する。この時、温度境界条件は

$$\left. \begin{aligned} z'=0: & -\frac{\partial T}{\partial z'} = h_a [T_a f(x, y) - T] \\ z'=h: & \frac{\partial T}{\partial z'} = h_b [T_b g(x, y) - T] \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$x = \pm a/2; T = 0, y = \pm b/2; T = 0 \quad (3)$$

ただし

$$z = z' - \eta \quad (4)$$

次に、 x, y, z 方向に関する熱伝導率の板厚方向に関する不均質特性として、次式のように同じ不均質特性を持つと仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \lambda_x(z') &= \lambda_{x0}(1+z'/h)^r, \lambda_y(z') = \lambda_{y0}(1+z'/h)^r \\ \lambda_z(z') &= \lambda_{z0}(1+z'/h)^r \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここで、 r は任意の不均質パラメータである。式(5)を式(1)に代入し解析を行えば、境界条件式(3)を満足する温度解の無次元表示は次式となる。

$$\bar{T} = \sum_{m,n} \sum_{d,d'} \{ A_{mn} \bar{z}^d I_v(\beta_{mn} \bar{z}) + B_{mn} \bar{z}^{d'} K_v(\beta_{mn} \bar{z}) \} \cos m \pi \bar{x} \cos n \pi \bar{y} \quad (6)$$

上式において、 A_{mn}, B_{mn} は境界条件(2)より決定される未定定数である。また、導入した無次元量は以下の通りである。

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} = \frac{x}{a}, \bar{y} = \frac{y}{b}, \bar{z} = \frac{z}{h}, (\bar{T}, \bar{T}_a, \bar{T}_b) &= (T, T_a, T_b)/T_0 \\ (H_a, H_b) &= (h_a, h_b) \times h, (\bar{\lambda}_{x0}, \bar{\lambda}_{y0}) = (\lambda_{x0}, \lambda_{y0})/\lambda_{z0} \\ (\bar{a}, \bar{b}) &= (a, b)/h \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

3.2 熱弾性解析 x, y 方向の変位 u', v' は

$$u' = u - z \partial \omega / \partial x, v' = v - z \partial \omega / \partial y \quad (8)$$

である。ここで、 u, v は中立面($z=0$)での x, y 方向の変位成分、 ω は z 方向のたわみである。また、ひずみ成分は

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u'}{\partial x}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v'}{\partial y}, \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} \right) \quad (9)$$

応力—ひずみ関係式は

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E_x} \{ \sigma_{xx} - \nu_{xy} \sigma_{yy} \} + \alpha_x T \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E_y} \{ \sigma_{yy} - \nu_{yx} \sigma_{xx} \} + \alpha_y T \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2G_{xy}} \sigma_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式(8)~(10)より、応力成分 $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ を定式化することができる(詳細省略)。更に、中立軸($z=0$)周りの軸力、モーメントを次式で定義する。

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \int \sigma_{xx} dz, N_y = \int \sigma_{yy} dz, N_{xy} = \int \sigma_{xy} dz \\ M_x &= \int \sigma_{xx} z dz, M_y = \int \sigma_{yy} z dz, M_{xy} = - \int \sigma_{xy} z dz \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式(10)において、物性値 $E_x, E_y, G_{xy}, \alpha_x, \alpha_y, \nu_{xy}, \nu_{yx}$ は、すべて z 方向に関する不均質特性を有するが、簡単化のため ν_{xy}, ν_{yx} は一定値であると仮定する。ここで、 E_x, G_{xy} に対して、次式の不均質特性を仮定する。

$$E_x(z') = E_{x0}(1 + \frac{z'}{h})^{m'}, \quad G_{xy}(z') = G_{xy0}(1 + \frac{z'}{h})^{m'} \quad (12)$$

この時、 $E_y(z')$ は応力一ひずみ関係の相反性より

$$E_y(z') = \frac{\nu_{yx}}{\nu_{xy}} E_{x0}(1 + \frac{z'}{h})^{m'} \quad (13)$$

更に、平板に対するモーメントと力のつりあい式を考慮すれば、たわみ ω に関する方程式は、横荷重が作用しない場合、

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + \frac{\nu_{yx}}{\nu_{xy}} \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} + \{2\nu_{yx} + 4(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})\} \frac{G_{xy0}}{E_{x0}} \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} = -\frac{1}{D_3} \left[\frac{\partial^2 M_{xT}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yT}}{\partial y^2} \right] \quad (14)$$

上式において

$$\left. \begin{aligned} M_{xT} &= \frac{1}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} \int E_x(z) \{ \alpha_x(z) + \nu_{yx}\alpha_y(z) \} T(x, y, z) dz \\ M_{yT} &= \frac{1}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} \frac{\nu_{yx}}{\nu_{xy}} \int E_x(z) \{ \alpha_y(z) + \nu_{xy}\alpha_x(z) \} T(x, y, z) dz \\ D_3 &= \frac{1}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} \int E_x(z) z^2 dz \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

また、曲げモーメント M_x, M_y は

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D_3 \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \nu_{yx} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) - M_{xT} \\ M_y &= -\frac{\nu_{yx}}{\nu_{xy}} D_3 \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \nu_{xy} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) - M_{yT} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

一方、式(4)中の中立軸の位置 η は次式で与えられる。

$$\eta = \int_0^h E_x(z') z' dz' / \int_0^h E_x(z') dz' \quad (17)$$

まず、板の支持条件として、全周単純支持の場合を考える。この時、境界条件は

$$\left. \begin{aligned} x = \pm a/2; \quad \omega = 0, \quad M_x = 0 \\ y = \pm b/2; \quad \omega = 0, \quad M_y = 0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

式(3)の温度境界条件を考慮すると

$$x = \pm a/2; \quad M_{xT} = 0, \quad y = \pm b/2; \quad M_{yT} = 0 \quad (19)$$

となるので、全周単純支持の場合の境界条件は

$$\left. \begin{aligned} x = \pm a/2; \quad \omega = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0 \\ y = \pm b/2; \quad \omega = \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

ここで

$$\omega = \sum_{m,n} \sum_{\substack{\text{odd} \\ \text{even}}} \omega_{mn} \cos m\pi\bar{x} \cos n\pi\bar{y} \quad (21)$$

とおき、式(21)を基礎式(14)に代入するとたわみ ω が求められる(詳細省略)。

また、他の力学的条件の場合、例えば一対辺固定/他対辺単

純支持、および全周単純支持の場合に対する熱弾性解は、式(21)で得られたたわみ ω により生じる周辺上の $\partial\omega/\partial n$ を零とする様に等温弾性解を重ね合わせるにより求められる。

4. 数値計算例

得られた解析解をもとに数値計算を遂行した。得られた結果の一部として、図2に温度分布、図3にたわみの分布を示す。数値計算に用いた数値パラメータは以下の通りである。

$$\left. \begin{aligned} f(\bar{x}, \bar{y}) &= H(\bar{x}_0 - |\bar{x}|) H(\bar{y}_0 - |\bar{y}|), \quad \bar{x}_0 = \bar{y}_0 = 1/4 \\ g(\bar{x}, \bar{y}) &= 0, \quad \bar{T}_a = 1, \bar{T}_b = 0, \quad \bar{\lambda}_{x0} = 1.0, \bar{\lambda}_{y0} = 2.0 \\ \bar{a} &= 10, \bar{b} = 10, H_a = 1.0, H_b = 1.0, r = -1, 0, 1 \\ m' &= 1.0, \nu_{xy} = 0.3, \nu_{yx} = 0.3, G_{xy0}/E_{x0} = 0.4 \\ \alpha_x(z) &= \alpha_{x0}\bar{z}, \alpha_y(z) = 0.5\alpha_{x0}\bar{z} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Fig.2 Distribution of Temperature T ($\bar{x}=0, \bar{y}=0$)

Fig.3 Distribution of Deflection w ($\bar{x}=0$)

参考文献

- (1) H.S.Carslaw and J.C.Jaeger, Conduction of Heat in Solids, 2nd edition, 1959, Oxford University Press.
- (2) 菅野他3名、直交異方性不均質板の熱応力解析、機論、A、57巻540号(1991)、1759~1767.