371 部分はく離をもつ細長い剛体介在物を有する無限弾性板の引張り

Tension of an Infinite Elastic Plate with a Partially Debonded Rigid Slender Inclusion

○学 船越大生 (明治大〔院〕) 正 長谷川久夫 (明治大学)

Hiroki Funakoshi, Meiji University, 1-1-1 Higashimita, Tama-ku, Kawasaki, 214-8571

Hisao Hasegawa, Meiji University

This paper deals with the stress concentration problem of an infinite elastic plate with a slender rigid inclusion under tension. It is assumed that there are partially debonded interfaces between the surfaces of the inclusion and the matrix. A method of solution is presented for the problem by using the Kelvin's solution in the two dimensional theory of elasticity. The problem is formulated by an integral equation with unknown body forces. Stress distributions around the inclusion are shown by numerical calculations.

Key Words: Elasticity, Inclusion, Stress Concentration, Elastic Plate, Tension, Debonded Interface

1. まえがき

本報告は、細長い繊維状の剛体介在物をもつ無限弾性板が介在物方向に引張りを受けるときの応力集中問題を二元弾性理論により考察したものである。介在物と母材の界面には部分的にはく離があるものとした。本問題に対し、物体力分布による解法を示す。そのため、二次元弾性理論のKelvinの解⁽¹⁾を応用する。本問題は分布させた物体力の大きさを未知関数とする積分方程式により定式化されるから、ここではそれを連立一次方程式に帰着させて解く。数値計算を実行して介在物まわりの応力分布を示す。本報告では介在物の端面の形状は半円形としたので、介在物の長さを零とおけば、円形介在物の場合⁽²⁾となる。

Fig1. Tension of infinite elastic plate with a partially debonded slender rigid inclusion

2. 境界条件

幅2Cの細長い剛体介在物をもつ無限弾性板に直角座標(x,y)と極座標(r,θ)を図1のようにとる。介在物の端面は半径cの半円形とし、介在物直線部の長さを2Sとする。介在物と母材の界面Lは端面(x=0,y=±(s+c)の近傍)において上下左右対称にy軸から角度φだけはく離しており、それ以外の界面では完全に接着されているものとする。はく離界面をL₁、接着界面をL₂とする。この無限弾性板が介在物から十分に離れたところで単純引張り応力

$$u_1^0 = -\frac{vpx}{2\mu(1+\nu)}, \quad u_2^0 = \frac{py}{2\mu(1+\nu)}, \quad (1)$$

$$\sigma_y^0 = p, \quad \sigma_x^0 = \tau_{xy}^0 = 0$$

を受けるものとする。このとき本問題の境界条件は次のように表される。

$$(i) \quad L=L_1; \quad \sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$$

$$(ii) \quad L=L_2; \quad u_1 = u_2 = 0$$

$$(iii) \quad x,y \gg c; \quad \sigma_y = p, \quad \sigma_x = \tau_{xy} = 0$$

(2)

ここにμ,νは母材の横弾性係数とポアソン比である。

3. 基本解

本研究では解法として物体力分布法を採用する。そのため、二次元弾性理論のKelvinの解すなわち無限弾性板内の一点に集中力が作用するときの解を応用する。問題の対称性により、ここでは、無限弾性板内の四点(x=±a,y=±b)にx方向の集中力とy方向の集中力が存在するときの解を採用することにし、それを次式のように表す。

$$u_i^k = u_i^k(a,b,x,y), \quad \sigma_{ij}^k = \sigma_{ij}^k(a,b,x,y) \quad (3)$$

ここに上添字kはk=1のときx方向集中力、k=2のときy方向集中力に対する解を意味する。具体的な式は文献(1)にあり、ここでは省略する。

4. 解法

上で述べた介在物問題に対し、物体力分布による解法を示す。介在物のない単純引張りを受ける無限弾性板内に介在物の境界となる面Lを想定し、その近傍の面Γに物体力を分布させる。そして、境界条件を満たすように分布させた物体力の大きさを定める。このとき、母材の変位u_iと応力σ_{ij}は解の重ね合わせの原理により次式のように表わされる。

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ \sigma_{ij} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i^0 \\ \sigma_{ij}^0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_i^b \\ \sigma_{ij}^b \end{Bmatrix} \quad (4)$$

ここに右肩添字 0 をもつ項は単純引張りの応力場の式(1)を意味し、b をもつ項は分布させた物体力による応力場であり、次式で表される。

$$\begin{Bmatrix} u_i^b \\ \sigma_{ij}^b \end{Bmatrix} = \int_{\Gamma} \left[f_1(\Gamma) \begin{Bmatrix} u_i^1 \\ \sigma_{ij}^1 \end{Bmatrix} + f_2(\Gamma) \begin{Bmatrix} u_i^2 \\ \sigma_{ij}^2 \end{Bmatrix} \right] d\Gamma \quad (5)$$

ここに $f_k(\Gamma)$ は分布させた物体力の大きさを表し、また右肩添字 1, 2 をもつ項は式(3)の基本解である。

式(4)に境界条件式(2)を適用すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} \text{(i) } L=L_1; \\ -\{u_i^0\}_{L_1} &= \int_{\Gamma} \{f_1(\Gamma)u_i^1 + f_2(\Gamma)u_i^2\}_{L_1} d\Gamma \\ \text{(ii) } L=L_2; \\ -\left\{ \begin{matrix} \sigma_r^0 \\ \tau_{r\theta}^0 \end{matrix} \right\}_{L_2} &= \int_{\Gamma} \left[f_1(\Gamma) \left\{ \begin{matrix} \sigma_r^1 \\ \tau_{r\theta}^1 \end{matrix} \right\} + f_2(\Gamma) \left\{ \begin{matrix} \sigma_r^2 \\ \tau_{r\theta}^2 \end{matrix} \right\} \right]_{L_2} d\Gamma \end{aligned} \quad (6)$$

下添字 L_1 は観測点 (x,y) が境界 L_1 上にあることを意味する。式(6)は物体力の大きさ $f_k(\Gamma)$ を未知関数とする積分方程式で、これを連立一次方程式に帰着させて解くため、 $f_k(\Gamma)$ を N 個の階段状の関数で近似して次式のように表す。

$$f_k(\Gamma) = \sum_{n=1}^N f_k^n \{s(\Gamma - \Gamma_{n-1}) - s(\Gamma - \Gamma_n)\} \quad (7)$$

ここに $S()$ はヘビサイドのステップ関数、 f_k^n は物体力の大きさを表す任意定数である。式(7)を式(6)に代入すれば次式を得る。

$$-\left\{ \begin{matrix} u_i^0 \\ \sigma_r^0 \\ \tau_{r\theta}^0 \end{matrix} \right\}_L = \sum_{n=1}^N \left[f_1^n \begin{Bmatrix} (u_i^1)_n \\ (\sigma_r^1)_n \\ (\tau_{r\theta}^1)_n \end{Bmatrix} + f_2^n \begin{Bmatrix} (u_i^2)_n \\ (\sigma_r^2)_n \\ (\tau_{r\theta}^2)_n \end{Bmatrix} \right] \quad (8)$$

ここに下添字 n をもつ項は次式を表す。

$$\begin{Bmatrix} (u_i^k)_n \\ (\sigma_{ij}^k)_n \end{Bmatrix} = \int_{\Gamma_n}^{\Gamma_{n+1}} \begin{Bmatrix} u_i^k \\ \sigma_{ij}^k \end{Bmatrix} d\Gamma \quad (9)$$

式(8)には $2N$ 個の任意定数 f_k^n があるから、境界面 L 上に N 個の観測点を選べば、 $2N$ 元連立一次方程式が構成される。それを解いて f_k^n を定めれば、母材の任意の点の変位と応力が求められる。

5. 数値結果と考察

上で述べた解法に基づき、母材のポアソン比を $\nu=0.3$ として数値計算を実行した。はく離角度を $\phi=5, 15, 30, 45$ 度、直線部分の長さ半径の比 $s/c=1, 2, 4, 6, 10$ としたときの結果の一部を図2~5に示す。図中の破線ははく離のないときの結果である。

これらの図から次のことがわかる。

- (1) はく離があると、はく離をしない場合に比べて界面上の応力は常に大きくなる。
- (2) はく離の始まる点 ($\theta = \pi/2 - \phi$) において応力は特異性をもつ。
- (3) 直線部分が長くなるにつれて応力は大きくなる。

Fig.2 Distributions of the stress σ_n on the boundary

Fig.3 Distributions of the shear stress τ_n on the boundary

Fig.4 Distributions of the stress σ_n on the boundary

Fig.5 Distributions of the shear stress τ_n on the boundary

文献

- (1) Timoshenko, S.P., and Goodier, J.N., Theory of Elasticity, McGraw-Hill, (1970), 127.
- (2) 船越, 長谷川, 機講論(関東学生会第39回卒研究発表講演会), (2000), 5.