433 直接 Trefftz 法による感度解析について

Sensitivity Analysis Using Direct Trefftz Method

○学 祖父江 恵 (名大院)

M. SOBUE Nagoya University, Nagoya 464-8603

正 北 英輔 (名大)

E.KITA Nagoya University, Nagoya 464-8601

正 池田 洋一 (大同工大)

Y. IKEDA, Daidou Technology University, Nagoya

正 神谷 紀生 (名大)

N.KAMIYA, Nagoya University, Nagoya 464-8601

Key Words: Trefftz Method, Sensitivity Analysis, Collocation Method

1 緒論

Trefftz 法は、支配方程式を満足する非特異な T-complete 関数を用いる境界型数値解析法である。解析対象が線形で同次な微分方程式によって支配される場合、境界を要素分解するだけで解析できるので、有限要素法や差分法などに代表される領域型解析法に比べて、入力データの作成は単純である。さらに Trefftz 法は、定式化の際に非特異な関数を用いるので、定式化に特異な基本解を用いる境界要素法と比べて導出された関係式は非特異となり、数学的扱いが簡単である。

Trefftz 法の定式化は、間接法と直接法に分けられる。間接法では、問題の解を T-complete 関数の線形結合で近似し、この近似解が境界条件を満足するように未知係数を決定する。未知係数の決定方法として選点法、最小二乗法、ガラーキン法などが利用できるが、特に選点法を利用するとエレメントフリーな解析法となる。これに対して、直接法では T-complete 関数を重み関数にとり、支配微分方程式から境界積分方程式を導く。これにガウス・グリーンの定理を適用して境界積分方程式を導出し、これに境界条件を与えて未知数について解く。間接法は 1926 年に提案された本来の Trefftz 法の定式化と考えられるのに対して、直接法は比較的最近になって提案された手法である。そこで、本研究では直接法で定式化された Trefftz 法を境界条件の感度解析に適用する方法について述べる。

本研究では、2 次元ポテンシャル問題を考え、直接法 Trefftz 法の定式化や感度解析の定式化について述べる。

2 直接 Trefftz 法の定式化

2-1 2 次元ポテンシャル問題と T-complete 関数

2 次元ポテンシャル問題の支配方程式と境界条件は次式で与えられる。

$$\nabla^2 u = 0 \quad (\text{in } \Omega) \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \bar{u} & (\text{on } \Gamma_1) \\ q = \frac{\partial u}{\partial n} &= \bar{q} & (\text{on } \Gamma_2) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここで、 Ω は解析対象領域を、 Γ_1, Γ_2 はそれぞれのポテンシャル u の指定境界、フラックス q の指定境界を示す。

また n は境界での単位法線ベクトル、上バーは指定境界条件値を示す。

微分方程式の導出に際して、境界要素法が特異性を有する基本解を用いるのに対して、Trefftz 法では、T-complete 関数と呼ばれる正則な関数群を用いて定式化する。T-complete 関数は支配方程式を満足する関数であり、閉領域における 2 次元ポテンシャル問題では、次のように与えられる。

$$u_i^* = \begin{cases} 1 & (i=1) \\ r^{i/2} \cos\left(\frac{i}{2}\theta\right) & (i=2,4,6,\dots) \\ r^{(i-1)/2} \sin\left(\frac{i-1}{2}\theta\right) & (i=3,5,7,\dots) \end{cases} \quad (3)$$

ここで r, θ は平面局座標であり、その原点は任意にとられる。また、 n_x, n_y は境界上の単位法線ベクトル n の x, y 方向成分である。

2-2 積分方程式の導出

式(1)に、重み関数 v をかけて解析対象領域について積分したものを 0 とおけば、次の重み付き残差式を得る。

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) v d\Omega = 0 \quad (4)$$

この式の左辺を 2 回部分積分すると、次式を得る。

$$\int_{\Gamma} \left[qv - u \frac{\partial v}{\partial n} \right] d\Gamma + \int_{\Omega} u \nabla^2 v d\Omega = 0 \quad (5)$$

ここで、重み関数として T-complete 関数の線形結合を用いる。

$$v = a_1 u_1^* + a_2 u_2^* + \dots + a_M u_M^* = \mathbf{a}^T \mathbf{u}^* \quad (6)$$

ここで、 $\mathbf{u}^*$ は支配方程式を満足するので次式が成り立つ。

$$\nabla^2 v = \mathbf{a}^T \nabla^2 \mathbf{u}^* = 0 \quad (7)$$

従って、式(6)より次式を得る。

$$\int (q\mathbf{u}^* - u\mathbf{q}^*) d\Gamma = 0 \quad (8)$$

ここで

$$\mathbf{q}^* = \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial n}$$

である。

2-3 境界要素による離散化

境界積分方程式を適合要素により離散化する。解析対象の境界 Γ を N 個の境界要素 Γ_i に分割すると次式を得る。

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} (q\mathbf{u}^* - u\mathbf{q}^*) d\Gamma = 0 \quad (9)$$

要素 Γ_i 上に、要素両端で $\Xi = \pm 1$ の局所座標系をとり、変数変換を行えば次式を得る。 J_i は、要素 Γ_i 上での変数変換のためのヤコビアンである。

$$\sum_{i=1}^N \int_{-1}^1 (q\mathbf{u}^* - u\mathbf{q}^*) J_i d\xi = 0 \quad (10)$$

これを離散化して行列を用いて表現すると次式を得る。

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{q} \quad (11)$$

ここで、 $\mathbf{u}, \mathbf{q}$ は節点ポテンシャルベクトルと節点フラックスベクトル、 $\mathbf{H}, \mathbf{G}$ はそれらの係数マトリックスを示す。

式(11)に境界条件を代入し、未知数に関する連立方程式に変換して解くことで、解を求める。

3 感度解析

3-1 形状感度解析

形状パラメータを設計変数とした場合の感度解析について考える。式(10)の両辺を設計変数で微分すると、次式を得る。

$$\sum_{i=1}^N \left[\int_{-1}^1 (q\mathbf{u}^* + q\dot{\mathbf{u}}^* - u\mathbf{q}^* - u\dot{\mathbf{q}}^*) J_i d\xi + \int_{-1}^1 (q\mathbf{u}^* - u\mathbf{q}^*) J_i d\xi \right] = 0 \quad (12)$$

ここで $(\dot{\cdot})$ は設計変数についての微分を示す。これを、マトリックスを用いて表すと次式を得る。

$$\mathbf{H}\dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{H}}\mathbf{u} + d\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{G}}\mathbf{q} + d\mathbf{G}\mathbf{q} \quad (13)$$

$\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{q}}$ を境界 Γ_1, Γ_2 ごとに分けて表示すると次式となる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_1 \\ \dot{\mathbf{u}}_2 \end{bmatrix} + \dot{\mathbf{H}}\mathbf{u} + d\mathbf{H}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1 \\ \dot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} + \dot{\mathbf{G}}\mathbf{q} + d\mathbf{G}\mathbf{q} \quad (14)$$

ここで、下添字は境界 Γ_1, Γ_2 を示す。境界条件値については感度が存在しないと考えると、

$$\dot{\mathbf{u}}_1 = 0, \dot{\mathbf{q}}_1 = 0$$

これを式(13)へ代入して整理すると次式を得る。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_1 \\ \dot{\mathbf{u}}_2 \end{bmatrix} + \dot{\mathbf{H}}\mathbf{u} + d\mathbf{H}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \dot{\mathbf{G}}\mathbf{q} + d\mathbf{G}\mathbf{q} \quad (15)$$

または

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{G}_1 & \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1 \\ \dot{\mathbf{u}}_2 \end{bmatrix} = (\dot{\mathbf{G}} + d\mathbf{G})\mathbf{q} - (\dot{\mathbf{H}} + d\mathbf{H})\mathbf{u} \quad (16)$$

この式を左辺について解くことで設計感度を求める。

3-2 境界条件感度解析

境界条件値を設計変数とした場合の感度解析について考える。式(10)の両辺を設計変数で微分すると、次式を得る。

$$\sum_{i=1}^N \int_{-1}^1 (q\mathbf{u}^* - u\mathbf{q}^*) J_i d\xi = 0 \quad (17)$$

ここで $(\dot{\cdot})$ は設計変数についての微分を示す。これを、マトリックスを用いて表すと次式を得る。

$$\mathbf{H}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} \quad (18)$$

ここで、 $\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{q}}$ は節点ポテンシャルベクトルと節点フラックスベクトルの設計変数についての微分を示し、 $\mathbf{H}, \mathbf{G}$ はそれらの係数マトリックスである。

ここで、例えば設計変数として Γ_1 上の条件値を設計変数とすることを考える。式(13)の行列やベクトルの成分を Γ_1, Γ_2 に分け、境界条件値に上バーをつけて表示すると次式を得る。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_1 \\ \dot{\mathbf{u}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1 \\ \dot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Γ_1 上の条件値を設計変数にとると、

$$\dot{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{I}, \dot{\mathbf{q}}_1 = 0$$

ここで、 $\mathbf{I}$ は成分が全て1であるベクトルを示す。これを式(19)に代入して整理すれば次式を得る。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \dot{\mathbf{u}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

または

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{G}_1 & \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1 \\ \dot{\mathbf{u}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{H}_1 & \mathbf{G}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ 0 \end{bmatrix} = -\mathbf{H}_1 \mathbf{I} \quad (21)$$

式(21)を左辺ベクトルについて解くことで設計感度を得る。