710 固有ひずみ場による複合材のマルチスケール強度評価の高精度化とその応用

An Accurate Estimation of Multiscale Mechanical Properties for Composite Materials based on Eigenstrain Theory and Its Applications

○正 比 嘉 吉 一 (神戸大・院)

正 富 田 佳 宏 (神戸大・工)

Yoshikazu HIGA, Grad. Sch. Sci. & Tech., Kobe Univ., Kobe 657-8501 Japan

Yoshihiro TOMITA, Fac. Engng., Kobe Univ.

Key Words : Micromechanics, Multiscale, Composite Materials, Eigenstrain, Homogenization Method

1 結 言

本報では, Eshelby の等価介在物理論⁽¹⁾から発達した微視構造を有する材料のマルチスケール解析手法^{(2),(3)}の精度評価を行うために, 介在物の部分分割毎に固有ひずみ場を求解することで得られる解析結果と, 2 変数漸近展開法に基づく均質化理論⁽⁴⁾を導入した有限要素解析による結果との比較を行う。ついで, 介在物内部で離散化された部分領域の分割手法の違いが, 単位セル内の微視的変形挙動ならびに巨視的な材料応答に及ぼす影響について検討を行うことにより, 同解析における高精度化手法を提示する。最後に, 本手法を強化相配置パターンの異なる一方向繊維強化型複合材ならびに短繊維強化型複合材の特性評価に適用する。

2 固有ひずみ場を用いた均質化手法

Nemat-Nasser ら⁽²⁾は, 図 1 で示される微視的周期性を有する材料に対して, 単位セル内で材料特性を均一化することを目的として, 次式を満足する Eshelby⁽¹⁾の固有ひずみ場を導入している。

$$C'(x) : \varepsilon(x) = C^M : (\varepsilon(x) - \varepsilon^*(x)) \quad (1)$$

$$C'(x) = \begin{cases} C^M & x \text{ in } M \\ C^\Omega & x \text{ in } \Omega \end{cases}, \quad \varepsilon^*(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ in } M \\ \varepsilon^*(x) & x \text{ in } \Omega \end{cases}$$

ここで, C^M 及び C^Ω はそれぞれ母相及び介在物相の弾性係数テンソルである。つづいて, 式 (1) を単位セル領域で平均化することにより, 次の関係式が得られる。

$$\bar{C} : \varepsilon^o = C^M : (\varepsilon^o - \bar{\varepsilon}^*) \quad (2)$$

ここで, $\bar{C}$ は巨視的な均質化弾性テンソルであり, $\bar{\varepsilon}^*$ は単位セル領域で平均化された固有ひずみ場である。

平衡方程式より, 一様なひずみ場 ε^o と固有ひずみ

場 $\varepsilon^*(x)$ との関係は以下のように導くことができる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon^o &= (C^M - C^\Omega)^{-1} : C^M : \varepsilon^*(x) \\ &\quad - \sum_{\xi} S^P(\xi) : \frac{1}{U} \int_{\Omega} \varepsilon^*(x) \cdot e^{i\xi \cdot (x-x')} dV_{x'} \\ S^P(\xi) &= \text{sym } A : C^M \\ \xi_p &= \frac{n_p \pi}{a_p} \quad n_p = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで $U (= 8a_1 a_2 a_3)$ は単位セルの体積, $i (= \sqrt{-1})$ は虚数単位, $2a_k$ は単位セルを規定する $x_k (k=1, 2, 3)$ 方向の辺の長さ, $\text{sym } A$ は 4 階のテンソル $A (= \xi \otimes \{\xi \cdot C^M \cdot \xi\}^{-1} \otimes \xi)$ の対称成分, $\otimes$ はテンソル積を表す。なお, 式 (3) 中の $\sum'$ は, $n_1 = n_2 = n_3 = 0$ の場合を除く総和を示す。

式 (3)₁ の右辺第 2 項に現れる被積分項に対し, 固有ひずみ場 ε^* を一定値とすることにより, 容易に積分関数の取扱が可能となり, 式 (2) によって巨視的な弾性係数テンソルを評価することができる。このような固有ひずみ場に対する平均操作は, 介在物全体で固有ひずみ場を一様とする手法で, 最も簡便な解析手法となる。

一方, 介在物領域内において固有ひずみ場が分布する場合においては, 以上のような平均操作ではなく, 介在物領域 Ω を n_e 個の部分領域に分割を行い, それぞれの領域内で発生する固有ひずみとして部分領域 $\Omega_r (\Omega = \bigcup_{r=1}^{n_e} \Omega_r)$ 毎に一定の固有ひずみ場を対応させる手法がある (以下, *Subdivisions Method* と呼ぶ)。したがって, 分割された領域 Ω_r 毎に固有ひずみを算出し, 得られた固有ひずみ場を分割領域内の平均値に置きかえることによって, 式 (2), (3) から巨視的に均質化された等価弾性テンソルを以下のように定式化している⁽²⁾。

$$\left. \begin{aligned} \bar{C} &= C^M : \left(I - \sum_{r=1}^{n_e} A^r \right) \\ (A^r)^{-1} &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{rs=1}^{n_e} \left\{ (C^M - C^\Omega) : C^M \delta^{rs} - S^{rs} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここで, 式 (4)₁ 中の I は 4 階の単位テンソル, 式 (4)₂ 中の δ^{rs} はクロネッカーのデルタ記号, S^{rs} は次式で表される 4 階のテンソル量である。

$$\left. \begin{aligned} S^{rs} &= \sum_{\xi} S^P(\xi) f_s g^r(\xi) g^s(-\xi) \\ g^r(\xi) &= \frac{1}{\Omega_r} \int_{\Omega_r} e^{i\xi \cdot x} dV_x \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

(a) Periodic Microstructure

(b) Unit cell

Fig.1 Unit cell for periodic microstructure.

ただし、式 (5)₁ 中の $f_s = \Omega_s / U$ ($s=1, 2, \dots, n_e$) は s 番目の部分領域の体積分率、 $g^s(\xi)$ 及び $g^s(-\xi)$ は s 番目の部分領域の介在物形状に依存した形状効果を示す関数及びその複素共役を示す。さらに Walker らは、式 (1), (3) より、部分分割毎に平均化されたひずみ $\bar{\epsilon}^s(\mathbf{x})$ を求解する形式に改め、単位セル内のひずみ分布を次式により表現している^{(5), (6)}。

$$\epsilon^o = \sum_{r=1}^{n_e} \sum_{s=1}^{n_e} \{ \delta^{rs} + R^{rs} \} : \bar{\epsilon}^s \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} R^{rs} &= \sum_{\xi}^{\pm\infty} R^P(\xi) f_s g^r(\xi) g^s(-\xi) \\ R^P(\xi) &= \text{sym } \Lambda : (C^M - C^\Omega) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

以上から、巨視的及び微視的な変形応答が式 (4) 及び式 (6) より算出される。このような定式化により、微視-巨視構造を連成した変形応答が同時に評価可能となり、微視構造を有する材料のマルチスケール解析手法として、その有用性が示されている^{(5), (6)}。

3 Subdivisions Method とその精度評価

3.1 数値解析モデル 本節では、巨視的一様変形の場合を考え、微視的周期性の仮定の下、マトリクス (M) - 介在物相 (Ω) からなる 2 相複合材の単位セルに対して平面ひずみ問題の解析モデルを構築する。ついで、作成した解析モデルに対して、式 (4)₁ による等価弾性定数ならびに式 (6) より算出される単位セル内に発生するひずみの求解を行う。このようにして得られた結果に対し、2 変数漸近展開法に基づく均質化理論⁽⁴⁾ (以下、均質化法と呼ぶ) を導入した有限要素法による解析結果と比較することにより、Subdivisions Method の精度評価を行った。なお介在物内部の部分分割には、格子状に配した Model I (図 2-(a)) ならびにマトリクス-介在物界面に発生する大きなひずみ勾配をより詳細に評価可能な Model II (図 2-(b)) の 2 種類の解析モデルを作成した。ここで、解析条件である材料定数は、マトリクス-介在物相のヤング率 E_M , E_Ω を $E_\Omega/E_M = 3, 10$, 両相のポアソン比を $\nu_M = \nu_\Omega = 0.3$ としている。

Fig.2 Unit cell containing square inclusion.

3.2 解析結果及び考察 介在物の体積分率を $V_f = 35, 55\text{vol.}\%$ 、両相の剛性比が $E_\Omega/E_M = 10$ の場合に得られる x_2 方向の等価弾性定数 $\bar{C}_{22}/C_{22}^M$ を縦軸に、介在物内部を離散化した際、部分領域の面積のばらつき度を示す分散 σ^2 を横軸にとったものを図 3 に示す。なお、図 2-(b) は $\sigma^2 \approx 2.33 \times 10^{-3}$ である。 $V_f = 55\text{vol.}\%$ の場合、介在物領域の離散化に際し、部分領域の面積の違いによる差が顕著に認められ、グラフ中破線で示した均質化法による解析結果との対応が悪くなっている。これは、部分領域の面積の違いが大きくなった場合、 $V_f = 35\text{vol.}\%$ としたモデルに比して、

Fig.3 Homogenized elastic moduli vs. variance of subdivision area.

Fig.4 Strain distribution $\bar{\epsilon}_{22}/\epsilon_{22}^o$ on x_2 -axis, calculated by Eqn.(6) and Homogenization method.

介在物内部に発生する大きな固有ひずみの分布を精度良く表現していないことに起因する。

つづいて、 $V_f = 35\text{vol.}\%$ とした解析モデルに対し、図 2 に示す各モデルより得られたひずみ値 $\bar{\epsilon}_{22}/\epsilon_{22}^o$ を図 4 に示す。ここで図中のプロットは、 x_2 軸上のひずみ値に対応しており、節点での値は、隣接要素のひずみを平均化したもので対応させている。

図から、Model I により算出されるひずみ分布と、均質化法により評価されたひずみ分布との対応が良いことが分かる。しかしながら、Model II から得られるひずみ値は、異種界面近傍ならびに介在物中心部のひずみとも著しく異なる。なお、 x_1 及び ξ 軸上のひずみについても同様の結果を得ている⁽⁷⁾。その結果、式 (4)₁ により算出される巨視的な材料定数の精度も低下する。以上より、Model I による固有ひずみ場を用いた解析手法にて、介在物を含有する複合材の微視的変形挙動ならびに巨視的な機械的性質を高精度で評価可能なことが明らかとなった。

なお、強化相配置パターンの異なる一方向繊維強化型複合材ならびに短繊維強化型複合材の特性評価を行った結果については、講演会当日に報告させていただく。

本研究は一部文部省科学研究費のもとに行われた。ここに記して感謝の意を表する。

参考文献

- (1) Eshelby, J. D., *Proc. R. Soc. Lond.*, **A241**, (1957), 376-396.
- (2) Nemat-Nasser, S. and Taya, M., *Quarterly of Applied Mathematics*, **71**, (1981), 335-362.
- (3) Nemat-Nasser, S. and Hori, M., *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials*, Elsevier Science Pub., North-Holland, Amsterdam, (1993).
- (4) Guedes, J. M. and Kikuchi, N., *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **83**, (1990), 143-198.
- (5) Walker, K. P., Freed, A. D. and Jordan, E. H., *Composites Eng.*, **1**, (1991), 29-40.
- (6) Walker, K. P., Freed, A. D. and Jordan, E. H., *Composites Sci. Tech.*, **50**, (1994), 71-84.
- (7) 比嘉, 吉國, 富田, 機論, A 編, (投稿中)