711 均質化法による積層複合材料の時間依存変形解析

Analysis of Time-dependent Deformation of Laminated Composites by a Homogenization Method

○正 松田 哲也 (名大院) 正 大野 信忠 (名大)

Tetsuya MATSUDA, Nagoya University, Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya
Nobutada OHNO, Nagoya University, Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya

Key Words: Homogenization Theory, Laminates, Fiber-reinforced Composites, Viscoplasticity

1. 緒言

微視的内部構造に周期性が存在する材料の巨視的特性を解析する理論として、変位の二尺度漸近展開に基づく均質化理論が知られている。この理論は、材料の巨視的特性を解析するだけではなく、微視構造における応力やひずみの分布も同時に解析することができるという特徴を有しているから、複合材料やハニカム構造体などの評価および設計に非常に有効な理論として注目されている。著者らは前報⁽¹⁾において周期複合材料の時間依存変形に対する均質化理論を定式化し、解析例として一方向連続繊維強化複合材料の弾・粘塑性変形解析を行った。その結果、一方向連続繊維強化複合材料は非主軸弾・粘塑性特性に関して大きな異方性を有することが示された。

上に述べたような著しい非主軸異方性のため、一方向連続繊維強化複合材料は一般に積層板として用いられることが多い。そのため、積層板の変形特性を明らかにすることは工学的にも非常に重要であり、すでに多くの実験的、解析的検討がなされてきた。均質化理論を用いた積層板の変形解析もこれまでにいくつか行われてきたが、今のところ弾性問題に限られており、非弾性解析は見当たらない。そこで本研究では、前報で定式化した時間依存変形の均質化理論を積層板の面内時間依存変形解析に応用する手法について議論する。また、その適用例としてCFRP積層板の面内弾・粘塑性変形を解析する。

2. 定式化

いま、図1(a)に示されるように、任意の繊維配向角のラミナ n 層からなる積層板を考え、座標系として X_i ($i=1, 2, 3$) を設ける。各ラミナの体積率は $f^{(m)}$ であるとし、層間は完全接着であるとする。なお、右上添え字 (m) は第 m 層における値であることを意味する。つづいて、図1(b)のように m 番目のラミナに注目し、第 m 層に対する座標系 $x_i^{(m)}$ ($i=1, 2, 3$) を設ける。ここで、 $x_3^{(m)}$ 軸は繊維方向と一致するように取られており、また $x_2^{(m)}$ 軸は X_2 軸と同一である。すなわち、座標系 $x_i^{(m)}$ は座標系 X_i を X_2 軸回りに繊維配向角 $\varphi^{(m)}$ だけ回転した座標系である。ただし角度は反時計回りを正とする。さらに、第 m 層の微視構造を図1(c)に示すように繊維とマトリックスからなる周期構造と仮定し、ユニットセル $Y^{(m)}$ を考える。ユニットセル $Y^{(m)}$ に対して、 y_3 軸方向が繊維方向と一致するように座標系 y_i を取る。

まず、各ラミナにおける構成式は、前報⁽¹⁾で示した時間依存変形の均質化理論を用いることにより表される。すなわちユニットセル $Y^{(m)}$ における均質化解析により、次に示す第 m 層における応力速度・ひずみ速度関係式を得る。

$${}_x\dot{\Sigma}_{ij}^{(m)} = \langle a_{ijkl}^{(m)} \rangle_x \dot{E}_{kl}^{(m)} - \langle r_{ij}^{(m)} \rangle \quad (1)$$

ここで、

$$a_{ijkl}^{(m)} = c_{ijkl}^{(m)} [\delta_{pk}\delta_{ql} - e_{pq(y)}(\chi^{kl(m)})] \quad (2)$$

$$r_{ij}^{(m)} = c_{ijkl}^{(m)} [\beta_{kl}(\sigma^{(m)}) - e_{kl(y)}(\varphi^{(m)})] \quad (3)$$

であり、 $\langle \# \rangle$ は $Y^{(m)}$ に関する体積平均を表す。なお、左下

Fig. 1 Structures of a laminate and coordinate systems

添え字 x は $x_i^{(m)}$ 座標系における値であることを意味する。式(2)と(3)における $\chi_i^{kl(m)}$ と $\varphi_i^{(m)}$ は特性関数であり、それぞれ次の境界値問題の解である。

$$\int_{Y^{(m)}} c_{ijkl}^{(m)} e_{pq(y)}(\chi^{kl(m)}) e_{ij(y)}(v^{(m)}) dY^{(m)} = \int_{Y^{(m)}} c_{ijkl}^{(m)} e_{ij(y)}(v^{(m)}) dY^{(m)} \quad (4)$$

$$\int_{Y^{(m)}} c_{ijkl}^{(m)} e_{pq(y)}(\varphi^{(m)}) e_{ij(y)}(v^{(m)}) dY^{(m)} = \int_{Y^{(m)}} c_{ijkl}^{(m)} \beta_{kl}(\sigma^{(m)}) e_{ij(y)}(v^{(m)}) dY^{(m)} \quad (5)$$

式(1)を次式のように行列表示する。

$$\{x\dot{\Sigma}^{(m)}\}_{6 \times 1} = [A^{(m)}]_{6 \times 6} \{x\dot{E}^{(m)}\}_{6 \times 1} - \{R^{(m)}\}_{6 \times 1} \quad (6)$$

式(6)をひずみ速度に関して解き、次式を得る。

$$\{x\dot{E}^{(m)}\} = [B^{(m)}] \{x\dot{\Sigma}^{(m)}\} + \{C^{(m)}\} \quad (7)$$

ここで、

$$[B^{(m)}] = [A^{(m)}]^{-1}, \quad \{C^{(m)}\} = [A^{(m)}]^{-1} \{R^{(m)}\} \quad (8)$$

である。いま、対称積層を想定し、面内変形のみを考え

$$x\dot{\Gamma}_{12}^{(m)} = x\dot{\Gamma}_{23}^{(m)} = x\dot{\Sigma}_{22}^{(m)} = x\dot{\Sigma}_{12}^{(m)} = x\dot{\Sigma}_{23}^{(m)} = 0, \quad C_{12}^{(m)} = C_{23}^{(m)} = 0 \quad (9)$$

として、式(7)を次式のような部分マトリックスおよび部分ベクトルを用いた形に書き改める。

$$\begin{Bmatrix} x\dot{\Sigma}_{11}^{(m)} \\ x\dot{\Sigma}_{33}^{(m)} \\ x\dot{\Gamma}_{31}^{(m)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}^{(m)} & B_{13}^{(m)} & B_{16}^{(m)} \\ B_{31}^{(m)} & B_{33}^{(m)} & B_{36}^{(m)} \\ B_{61}^{(m)} & B_{63}^{(m)} & B_{66}^{(m)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x\dot{\Sigma}_{11}^{(m)} \\ x\dot{\Sigma}_{33}^{(m)} \\ x\dot{\Sigma}_{31}^{(m)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} C_{11}^{(m)} \\ C_{33}^{(m)} \\ C_{31}^{(m)} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

ただし、

$$x\dot{\Sigma}_{22}^{(m)} = B_{21}^{(m)} x\dot{\Sigma}_{11}^{(m)} + B_{23}^{(m)} x\dot{\Sigma}_{33}^{(m)} + B_{26}^{(m)} x\dot{\Sigma}_{31}^{(m)} + C_{22}^{(m)} \quad (11)$$

である。角度 $\varphi^{(m)}$ の回転を与える座標変換行列を、応力およびひずみに対してそれぞれ $[P^{(m)}]$ および $[Q^{(m)}]$ とし、それらを式(10)に作用させて応力に関して解くことで次式を得る。

$$\{x\dot{\Sigma}^{(m)}\} = [P^{(m)}]^{-1} [\bar{B}^{(m)}]^{-1} [Q^{(m)}] \{x\dot{E}^{(m)}\} - [P^{(m)}]^{-1} [\bar{B}^{(m)}]^{-1} \{\bar{C}^{(m)}\} \quad (12)$$

ここで、 $(\bar{\cdot})$ は部分マトリックスおよび部分ベクトルを、左下添え字 X は X_i 座標系における値であることをそれぞれ意味する。式(12)の両辺に各層の体積率 $f^{(m)}$ をかけて、 m に関して総和を取るとことで、次に示す積層板全体に対する応力速度・ひずみ速度関係式を得る。

$$\{\bar{E}\} = [\bar{A}] \{\bar{E}\} - \{\bar{R}\} \quad (13)$$

ここで、

$$[\bar{A}] = \sum_m f^{(m)} [P^{(m)}]^{-1} [\bar{B}^{(m)}]^{-1} [Q^{(m)}] \quad (14)$$

$$\{\bar{R}\} = \sum_m f^{(m)} [P^{(m)}]^{-1} [\bar{B}^{(m)}]^{-1} \{\bar{C}^{(m)}\} \quad (15)$$

である。規定された巨視的荷履歴のもと式(13)を解くことで積層板全体の応力速度とひずみ速度が求まる。ついで式(11)と(12)から各ラミナの応力速度とひずみ速度を計算する。さらに各ラミナのひずみ速度からユニットセル $Y^{(m)}$ における微視的応力速度を求め、微視的応力を更

新し、次のタイムステップへ進む。以上を繰り返すことで解析を進める。

3. 解析例

本解析法の適用例として、CFRP 積層板の面内弾・粘塑性変形解析を行った。積層板を構成するラミナは一方強化CFRPを想定し、繊維とマトリックスのヤング率およびポアソン比を次のように定めた。

$$E_f/E_m = 100, \quad \nu_f = 0.25, \quad \nu_m = 0.35 \quad (16)$$

なお、繊維は弾性体、マトリックスは弾・粘塑性体であるとした。また、繊維配列は六方配列とし、繊維体積率は60%とした。積層構成としては $[0^\circ/90^\circ]$ と $[0^\circ/\pm 60^\circ]$ を考え、負荷条件として無次元単位マクロひずみ速度での面内引張を受けるとした。負荷方向を $[0^\circ/90^\circ]$ 積層板の場合 $\varphi = 0^\circ \sim 45^\circ$ 、 $[0^\circ/\pm 60^\circ]$ 積層板の場合 $\varphi = 0^\circ \sim 30^\circ$ の間でそれぞれ変化させたときに得られた無次元マクロ相当応力 Σ_{eq}^* と無次元マクロ相当ひずみ E_{eq}^* の関係を図2に示す。

図2(a)から、 $[0^\circ/90^\circ]$ 積層板の場合、負荷方向が繊維方向からわずかでも偏ると応力が大きく減少しており、著しい面内異方性を有していることが分かる。この傾向は実験による結果⁽²⁾とよく一致する。一方、図2(b)から $[0^\circ/\pm 60^\circ]$ 積層板の場合は面内弾・粘塑性特性が等方的であり、また、マトリックスの粘塑性の影響がほとんど見られないことが分かる。

参考文献

- (1) Ohno, N., Wu, X. and Matsuda, T., Int. J. Mech. Sci., 42 (2000), 1519-1536.
- (2) 河原一智, 杉山祐次, 東郷敬一郎, 機講論, No.993-2 (1999), 48-49.

(a) $[0^\circ/90^\circ]$

(b) $[0^\circ/\pm 60^\circ]$

Fig. 2 Relations of nondimensional equivalent macro-stress and macro-strain under uniaxial loading