223 周辺固定積層扁平殻の内部共振 (対称モードと非対称モードの固有振動数が近い場合)

Internal Resonance of Clamped Laminated Shallow Shells

(Case that the natural frequencies of symmetric and asymmetric modes are close)

正 阿部 晶(旭川高専)

Akira ABE, Asahikawa National College of Technology, 2-2 Syunkodai, Asahikawa

This paper presents the response of clamped laminated shallow shells with an internal resonance $\omega_1 \approx \omega_2$, where ω_1 and ω_2 are the linear natural frequencies of the symmetric and asymmetric first vibration modes, respectively. The displacements are expressed using eigenvectors for linear vibration modes calculated by the Ritz method. Applying Galerkin's procedure to the equation of motion, non-linear differential equations are derived. The shooting method is used to obtain the steady-state response when the driving frequency Ω is near ω_1 . The modal interaction between the symmetric and asymmetric modes is discussed.

Key Words: Non-Linear Vibration, Internal Resonance, Laminated Shallow Shell

1. はじめに

非線形振動現象のうちの内部共振に関する研究が盛んに行われている⁽¹⁾。しかしながら平板や殻などの連続体の内部共振に関しては、そのほとんどが等方性材料を扱った研究であり、FRP(Fiber Reinforced Plastics)に代表される繊維強化複合材料を扱った研究は非常に少ない⁽²⁾。そこで本研究では、周辺固定支持された積層扁平殻の対称1次振動モード(1次モード)と非対称1次振動モード(2次モード)の線形固有振動数 ω_1 と ω_2 が $\omega_1 \approx \omega_2$ なる関係を有するときの内部共振現象を調べる。このために、まずリッツ法によって求められた線形振動モードの固有ベクトルを用いて殻の変位を近似する。次いで、運動方程式にガラーキン法を適用して、時間に関する常微分方程式を導出する。この方程式にシューティング法⁽³⁾を適用し、定常状態における周波数-応答曲線を求める。数値計算例において、この内部共振現象を明らかにする。

2. 理論解析

図1は N 枚のラミナで構成される長さ a , b , 厚さ h , 曲率半径 R_x , R_y の積層扁平殻を示している。図のように板の中央面内に (x, y, z) 座標をとり、そこでの x , y および z 方向の変位をそれぞれ u_0 , v_0 , w_0 とする。また、各層の材料主軸方向を (L, T) とし、 L 軸と x 軸のなす角を θ とする。

一次せん断変形理論に基づき、幾何学的非線形性を考慮した積層扁平殻の運動方程式はハミルトンの原理より次式のように導かれる⁽⁴⁾。

$$\left. \begin{aligned} \rho h u_{0,tt} - N_{x,x} - N_{xy,y} - \frac{\dot{Q}_x}{R_x} &= 0 \\ \rho h v_{0,tt} - N_{xy,x} - N_{y,y} - \frac{\dot{Q}_y}{R_y} &= 0 \\ \rho h w_{0,tt} + \frac{N_x}{R_x} + \frac{N_y}{R_y} - Q_{x,x} - Q_{y,y} \\ - (N_x w_{0,x} + N_{xy} w_{0,y})_{,x} - (N_{xy} w_{0,x} + N_y w_{0,y})_{,y} &= q \cos \hat{\Omega} t \\ \frac{\rho h^3}{12} \psi_{x,tt} - M_{x,x} - M_{xy,y} + Q_x &= 0 \\ \frac{\rho h^3}{12} \psi_{y,tt} - M_{xy,x} - M_{y,y} + Q_y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで、 ψ_x , ψ_y はそれぞれ中央面の垂線の y , x 軸まわりの回転角であり、 N , M と Q はそれぞれ扁平殻の合力、合モーメントおよび合せん断力を表している。また、コンマはこの後に続く文字に関する微分を表している。以降の解析を簡単化するため、次の無次元量を導入する。

$$\left. \begin{aligned} \xi = 2x/a, \quad \eta = 2y/b, \quad U = u_0/h, \quad V = v_0/h \\ W = w_0/h, \quad \alpha = a/b, \quad H = h/a, \quad r_x = R_x/a \\ r_y = R_y/a, \quad \tau = \frac{1}{a^2} \sqrt{D_0/(\rho h)} t, \quad q^* = qa^3/(D_0 H) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

周辺固定の境界条件は次式によって与えられる。

$$W = U = V = \psi_x = \psi_y = 0 \text{ at } \xi = \pm 1 \text{ and } \eta = \pm 1 \quad (3)$$

上式を満足するべき級数

$$\phi_\xi = \xi^{i-1}(1 - \xi^2), \quad \phi_\eta = \eta^{j-1}(1 - \eta^2) \quad (4)$$

を用いて扁平殻の変位を近似し、リッツ法による線形振動解析を実施する⁽⁵⁾。

本研究では、1次と2次振動モードの固有角振動数 ω_1 , ω_2 が $\omega_1 \approx \omega_2$ の関係にあるときの内部共振のみを考慮し、系の挙動がこの2つの振動モードによって支配され、他のモードは全て無視できるものと仮定する。扁平殻の変位をリッツ法で求められたこの2つの線形振動モードの固有ベクトルを用いて

Fig.1 Coordinates of a laminated shallow shell

Fig.2 Frequency-response curves; (a) $W_{1\max}$, (b) $|W_2|_{\max}$

$$\left. \begin{aligned} U &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(U_1(\tau) a_{ij}^{(1)} + U_2(\tau) a_{ij}^{(2)} \right) \phi_\xi \phi_\eta \\ V &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(V_1(\tau) b_{ij}^{(1)} + V_2(\tau) b_{ij}^{(2)} \right) \phi_\xi \phi_\eta \\ W &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(W_1(\tau) c_{ij}^{(1)} + W_2(\tau) c_{ij}^{(2)} \right) \phi_\xi \phi_\eta \\ \psi_x &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(X_1(\tau) d_{ij}^{(1)} + X_2(\tau) d_{ij}^{(2)} \right) \phi_\xi \phi_\eta \\ \psi_y &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(Y_1(\tau) e_{ij}^{(1)} + Y_2(\tau) e_{ij}^{(2)} \right) \phi_\xi \phi_\eta \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

と近似する⁽⁴⁾。ここで、 U などの下文字および a_{ij} などの肩文字は振動モードの次数を表している。上式を運動方程式に代入してガラーキン法を適用すれば、10本の連立常微分方程式が得られる。この方程式において、面内慣性 ($U_{i,\tau\tau}$, $V_{i,\tau\tau}$) と回転慣性 ($X_{i,\tau\tau}$, $Y_{i,\tau\tau}$) を無視し、変数 U_i , V_i , X_i および Y_i を消去すれば、2本の連立常微分方程式

$$\left. \begin{aligned} W_{1,\tau\tau} + \mu\omega_1 W_{1,\tau} + \omega_1^2 W_1 + G_1 W_1^2 + G_2 W_2^2 \\ + G_3 W_1^3 + G_4 W_1 W_2^2 = F \cos \Omega\tau \\ W_{2,\tau\tau} + \mu\omega_2 W_{2,\tau} + \omega_2^2 W_2 + G_5 W_1 W_2 + G_6 W_1^2 W_2 + G_7 W_2^3 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

が導かれる。ここで、 ω_i と G_i はそれぞれ無次元化された固有振動数と非線形項の係数である。また、 $\mu\omega_i W_{i,\tau}$ の項は付加された粘性減衰項である。上式にシューティング法を適用し、 $\Omega \approx \omega_1$ であるときの周波数-応答曲線を求める。

Fig.3 Time histories ($\Omega/\omega_1 = 0.98$); (a) W_1 , (b) W_2

3. 数値計算例と考察

数値計算例では、グラファイト・エポキシ材 ($E_L = 138$ (GPa), $E_T = 8.96$ (GPa), $G_{LT} = 7.10$ (GPa), $G_{TZ} = E_T/2$, $\nu_{LT} = 0.30$) からなる縦横比 $a/b = 1$ 、板厚比 $h/a = 0.01$ および曲率半径 $R_x/a = R_y/a = 8$ のクロスプライ積層扁平殻 ($\theta = 0^\circ/90^\circ/0^\circ$) を扱う。その他のパラメータは $\mu = 0.01$, $q^*/\omega_1^2 = 0.008$ の値を用い、せん断修正係数を $5/6$ とした。本研究の非線形振動解析の精度は式 (5) の級数の項数に依存する。紙面の都合上ここでは省略するが、級数の項数 $I \times J$ を増したときの線形固有振動数 ω_i と周波数応答曲線上の収束状況を調べ、 $I \times J = 8 \times 8$ 項で実用上十分な精度に収束していることを確認している。以下の計算では $I \times J = 8 \times 8$ を採用し、固有振動数は $\omega_1 = 174.5$, $\omega_2 = 176.1$ となる。

周波数-応答曲線を図 2 に示す。ここでは、安定な応答のみを示しており、実線は 2 モード応答、破線は単一モード応答を表している。また、○、△印はそれぞれサドル・ノードおよびピッチホーク分岐点を示している。図より、 $\Omega/\omega_1 = 0.945$ 付近のピッチホーク分岐によって生じ、 $\Omega/\omega_1 = 0.970$ 付近のサドル・ノード分岐によって消失する振動と、 $\Omega/\omega_1 = 0.956$ 付近のサドル・ノード分岐によって生じ、 $\Omega/\omega_1 = 0.995$ 付近のサドル・ノード分岐によって消失する 2 つの安定な 2 モード応答が認められる。なお、ピッチホーク分岐によって生じる応答は、加振振動数の増加に伴って単一モード応答から 2 モード応答に連続的に移行するものである。図 3 は図 2 の□印 ($\Omega/\omega_1 = 0.98$) における 1 周期 ($T = 2\pi/\Omega$) 間の時系列データである。図 (a) と (b) はそれぞれ W_1 および W_2 の応答を表している。初期条件により W_1 と W_2 の位相差がほぼ 0 (実線) と π (破線) の応答が発生する。位相差がほぼ 0 と π の W_2 の最大値が一致しないことが特徴的である。このような現象は平板の 1:1 内部共振では現れず、殻特有の現象であると考えられる。

参考文献

- (1) Nayfeh, A. H., *Nonlinear Interaction*, (2000), Wiley.
- (2) 例えば, Abe, A., Kobayashi, Y. and Yamada, G., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **68**-4(2001), 640.
- (3) 例えば, 田村・松崎, 機論, **60**-569, C(1994), 30.
- (4) Abe, A., Kobayashi, Y. and Yamada, G., *J. sound Vib.*, **234**-3(2000), 405.
- (5) 例えば, 成田・太田・森賀・目黒, 機論, **60**-570, C(1994), 406.