415 MLPG 法による棒の力学解析を行う場合のサポート半径と重み関数について

A Study on Support Radiuses and Weight Functions in Mechanical Analysis of Bars by a MLPG Method

○学 宮口 幸人 (広島大) 乾 道 (広島大) 正 岡本 伸吾 (広島大)

Yukito MIYAGUCHI, Susumu INUI and Shingo OKAMOTO,
Graduate School of Engineering, Hiroshima University, Kagamiyama, Higashi-Hiroshima, 739-8527.

1. 緒 言

現在, 有限要素法を用いた数値計算法は, 設計の際や研究の各分野において広く用いられている。有限要素法を用いて解析を行う場合, 解析対象を要素に分割しなければならないが, 解析対象が大規模でしかも複雑な形状をしている場合, 要素に分割する作業に多くの労力と時間を必要とする。これに対して, 要素を必要としないメッシュレス法は, 要素分割の過程が不要になるので, 労力と時間が節約できる。このような利点のため, メッシュレス法は現在多くの注目を集めている。本報では, メッシュレス法の一つの手法である Atluri ら⁽¹⁾ によって提案された MLPG(Meshless Local Petrove-Galerkin) 法について研究を行った。MLPG 法を用いた研究はいくつか報告されており, Atluri ら⁽²⁾ は MLS(Moving Least Squares, 移動最小二乗) 法を一般化した GMLS(Generalized Moving Least Squares, 一般化移動最小二乗) 法を用いて変位の近似を行い, 薄肉はりの静力学計算を行っている。しかし, MLPG 法が将来において, 有限要素法の代替または補完的な手法として使われていくためには, 変位を近似する際に用いる基底ベクトルの階数, 節点数, サポート半径および重み関数をどのように設定するかという課題があるが, それらについて検討した報告は著者らが調査した限りでは見当たらない。

そこで本報では, まず MLS 法を用いて変位の近似を行い, MLPG 法⁽¹⁾ によって棒の動力学計算が行える運動方程式を導出し, 導出した運動方程式を用いて静力学計算が行えるプログラムを作成した。次に, 棒の静力学計算を行いながら, 精度の良い数値解を求めることができるように, 基底ベクトルの階数, 節点数, サポート半径および重み関数について検討した。

2. 定 式 化

2.1 変位の近似 解析対象である棒内には n 個の節点があるものとする。変位 $u(x)$ の近似式 $u^h(x)$ を次式で与える。

$$u^h(x) = p^T(x) a(x) \quad (1)$$

ここで

$$p(x) = \{1, x, x^2, \dots, x^{m-1}\}^T \quad (2)$$

$$a(x) = \{a_1(x), a_2(x), \dots, a_m(x)\}^T \quad (3)$$

$p(x)$ は階数 m の基底ベクトルを, $a(x)$ は未知係数ベクトルを表している。未知係数ベクトル $a(x)$ は, 式 (4) に示す重みつき誤差ノルムの平方 $J_x(a(x))$ を最小化することによって決定される。

$$J_x(a(x)) = \sum_{i=1}^n w_i(x) [p^T(x_i) a(x) - u(x_i)]^2 \quad (4)$$

ここで, $w_i(x)$ は重み関数である。従来の研究では, 重み関数 $w_i(x)$ としては, 図 1 に示すような節点 i に関して対称な重み関数を用いられている。決定された未知係数ベクトル $a(x)$ を式 (1) に代入すると次式が得られる。

$$u^h(x) \cong \sum_{i=1}^n \phi_i(x) \hat{u}_i \quad (5)$$

ここで, $\hat{u}_i$ は節点 i における変位を, $\phi_i(x)$ は形状関数を表している。なお, 変位の近似式 (5) を得るためには次式を満たさなければならない。

$$k \geq m \quad (6)$$

ここで, k は任意点で重なり合っているサブ領域の数である。

Fig. 1 Symmetrical weight-function

2.2 メッシュレス運動方程式 棒に分布荷重 $f(x, t)$ が作用した場合のメッシュレス運動方程式を導出する。棒の動的な力の釣合いは次式で表される。

$$\rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = f(x, t) \quad (7)$$

境界 Γ 上では, 以下の境界条件が成り立つ。

$$u(x, t) = \bar{u}(x, t) \quad \text{on } \Gamma_u \quad (8)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \bar{\epsilon}(x, t) \quad \text{on } \Gamma_\epsilon \quad (9)$$

ここで, Γ_u と Γ_ϵ はそれぞれ変位とひずみが規定されている境界である。ペナルティ法およびガラーキン法を式 (7)~(9) に適用し, 変位の近似式 (5) を代入すると次式が得られる。

$$M_i \ddot{\hat{u}}(t) + K_i \hat{u}(t) = f_i(t) \quad (10)$$

ここで, M_i は質量マトリックスを, K_i は剛性マトリックスを, $f_i(t)$ は外力ベクトルを, $\hat{u}(t)$ は節点変位ベクトルを表している。

導出されたメッシュレス運動方程式 (10) を用いて, 棒の静力学計算ができるプログラムを作成した。

3. 結 果

3.1 解析モデル 計算に用いた解析モデルを図 2 に示す。棒の材質は鋼とし, 密度 ρ とヤング率 E としては, それぞれ $\rho = 7.9 \times 10^3 [\text{kg/m}^3]$ と $E = 2.06 \times 10^2 [\text{GPa}]$ の値を用いた。また, 節点は等間隔に配置した。次に, サブ領域の重なり方について, 図 3 に示す。たとえば, 節点 i と節点 $(i+1)$ で囲まれた領域内の任意点では, サブ領域 Ω_{i-1} と Ω_i および Ω_{i+1} の 3 つのサブ領域が重なり合っているため $k = 3$ である。

3.2 静力学計算 変位の近似をする際に用いる基底ベクトルの階数 m としては $m = 3$ を, 節点数 n としては $n = 8$ を用いて静力学計算を行った。この場合, 節点 i に関して対称な重み関数を用いた場合には, すべての領域 $m = k$ とすることができない。たとえば, 図 5 の (1) に示すように, すべての領域で $m = k = 3$ とすることができず, $k \geq 4$ の領域ができてしまう。この場合, 図 5 の (2) に示すように, 精度良い, 節点 i における値 $\hat{u}_i$ と MLS 法による値 $u^h(x)$ が得られなかった。 $m < k$ となっている領域では, 近似式 $u^h(x)$ の未知係数 ($a_1, a_2 \sim a_m$) の数 (m 個) に比べて, 重なり合っているサブ領域の数 k が多くなるので, MLS 近似によって得られた $u^h(x)$ を用いて計算した節点 $i (i = 1 \sim k)$ における $u^h(x_i)$ の値と節点における変位 $\hat{u}_i$ との差が大きくなるので精度が悪くなる。したがって, すべての領域で $m = k$ とする必要がある。そこで, すべての領域で $m = k$ とすることができるような重み関数を提案した。図 4 に提案した重み関数を示す。ここで, 図 4 に示す重み関数は節点 i を境にして x のプラス方向の領域とマイナス

l : Length of bar ($l = 1.0 \times 10^{-1}$ [m])
 b : Breadth of bar ($b = 1.0 \times 10^{-2}$ [m])
 h : Height of bar ($h = 1.0 \times 10^{-2}$ [m])
 f_e : External force ($f_e = 1.0 \times 10^3$ [N])
 n : Number of node
 $N_i, i = 1 \sim n$: Node number
 $ln [= l / (n-1)]$: Length between i -th node and $(i+1)$ -th node
 $r_i, i = 1 \sim n$: Support radius of i -th node

Fig. 2 Analysis model of bar

Fig. 3 Schematic representation of overlapping sub-domain

方向の領域で異なる関数系を用いた重み関数である。節点 i に関して非対称な重み関数を用いた場合の計算結果を図 6 に示す。図 6 の (1) に示すように、節点 3 以外の重み関数 $w_i(x)$ としては節点 i に関して対称な重み関数を、節点 3 の重み関数 $w_3(x)$ としては節点 i に関して非対称な重み関数を用いれば、すべての領域で $m = k$ とすることができる。この場合、図 6 の (2) に示すように、 $\hat{u}_i$ と $u^h(x)$ の値は解析値とよく一致していた。

4. 結 言

変位を近似する際に用いる基底ベクトルの階数、節点数、サポート半径および重み関数について検討するとともに棒の静力学計算を行った。結果を以下にまとめる。

1. 精度の良い数値解を得るためには、すべての領域で、変位を近似する際に用いる基底ベクトルの階数と任意点で重なり合っているサブ領域の数とが等しくなるようにサポート半径を設定する必要がある。
2. 従来用いられている節点に関して対称な重み関数を用いた場合、どのようにサポート半径を設定しても、すべての領域で、変位を近似する際に用いる基底ベクトルの階数と任意点で重なり合っているサブ領域の数とを等しくすることができない場合がある。このような場合は、基底ベクトルの階数と重なり合っているサブ領域の数とを等しくすることができるよう、節点に関して非対称な重み関数を用いれば、精度の良い数値解を得ることができる。

References

- (1) S.N.Atluri, T.Zhu, A New Meshless Local Petrov-Galerkin(MLPG) Approach in Computational Mechanics, Computational Mechanics, Vol.22, (1998), pp.117-127
- (2) S.N.Atluri, J.Y.Cho, H.-G.Kim, Analysis of Thin Beams, Using the Meshless Local Petrov-Galerkin Method, with Generalized Moving Least Squares Interpolations, Computational Mechanics, Vol.24, No.5, (1999), pp.334-347

Fig. 4 Unsymmetrical weight function

(1) Overlapping sub-domain

(2) Displacements of bar

Fig. 5 Displacements in statics in the case of $n = 8$, $k = 3$ or 4 and $m = 3$, with symmetrical weight-function

(1) Overlapping sub-domain

(2) Displacements of bar

Fig. 6 Displacements in statics in the case of $n = 8$, $k = 3$ and $m = 3$, with unsymmetrical weight-function