833 境界要素法による圧電材料の定常振動解析の効率化

EFFICIENT ANALYSES OF HARMONIC VIBRATIONS OF PIEZOELECTRIC MATERIAL BY BEM

○正 松本 敏郎 (信州大工) 正 田中 正隆 (信州大工)
学 小川 洋平 (信州大院)

Toshiro MATSUMOTO, Shinshu University, 4-17-1 Wakasato, Nagano 380-8553
Masataka TANAKA, Shinshu University
Youhei OGAWA, Graduate School of Shinshu University

Key Words: Boundary Element Method, Time-harmonic Analysis, Piezoelectric Material

1. 緒 言

圧電セラミックやポリマーなどの圧電材料⁽¹⁾が、航空機、自動車、医療機器、電子機器等でますます重要になってきている。それに伴い、圧電材料の強度や振動特性などの力学的挙動の高精度な数値解析法の開発が必要となってきている。圧電材料は、弾性場と電場が互いに連成し、材料定数も異方性⁽²⁾を示すため、その支配微分方程式はきわめて複雑な形となる。

境界要素法の定式化においては、支配微分方程式の基本解が必要となるが、圧電材料の変形・応力解析に対する基本解は、他の問題と異なり、単位球面上の積分⁽³⁾として数値積分により計算しなければならず、計算時間がかかる。

本研究では、この基本解を用いた3次元の境界要素法プログラムを開発し、基本解の計算の効率化を図る数値解析例により本境界要素解析法の有効性を示す。

2. 理 論

2.1 基本解 圧電材料の調和振動解析の基本解は、次のように書くことができる。

$$U_{kL}^* = \frac{1}{8\pi^2} \int_{|n|=1} P_{jL}(n) \sum_{m=1}^3 \frac{1}{2\lambda_m} \frac{A_{kj}^m}{A_{gg}^m} \left\{ 2\delta(n \cdot x) + i\omega \sqrt{\rho/\lambda_m} e^{i\omega|n \cdot x|/\sqrt{\rho/\lambda_m}} \right\} dS(n) \quad (1)$$

$$U_{4L}^* = \frac{1}{8\pi^2} \int_{|n|=1} \left[\alpha_k P_{jL}(n) \sum_{m=1}^3 \frac{1}{2\lambda_m} \frac{A_{kj}^m}{A_{gg}^m} \times \left\{ 2\delta(n \cdot x) + i\omega \sqrt{\rho/\lambda_m} e^{i\omega|n \cdot x|/\sqrt{\rho/\lambda_m}} \right\} - \beta_{4L}(n) \delta(n \cdot x) \right] dS(n) \quad (2)$$

ただし、

$$P_{jL}(n) = \delta_{jL} + \frac{e_{lij} n_l n_i}{\epsilon_{\alpha\beta} n_\beta n_\alpha} \delta_{4L} \quad (3)$$

$$A_{kj}^m = \text{adj}[Q_{kj}(n) - \lambda_m \delta_{kj}] \quad (4)$$

$$Q_{jk}(n) = C_{ijkl} n_l n_i + \frac{e_{lij} n_l n_i e_{\gamma k\eta} n_\eta n_\gamma}{\epsilon_{\alpha\beta} n_\beta n_\alpha} \quad (5)$$

Fig. 1 Geometrical relation between vectors x , e , d and n

$$\alpha_k(n) = \frac{e_{\gamma k\eta} n_\eta n_\gamma}{\epsilon_{ab} n_b n_a} \quad (6)$$

$$\beta_{4L}(n) = \frac{\delta_{4L}}{\epsilon_{ab} n_b n_a} \quad (7)$$

である。ここで C_{ijkl} は弾性定数テンソル、 e_{lij} は圧電定数テンソル、 ϵ_{il} は誘電率テンソル、 λ_m はマトリックス $Q_{jk}(n)$ の固有値である。また大文字で書いた添字は 1~4 の範囲を取り、小文字の添字は 1~3 の範囲を取るものとする。

図 1 に示す座標系によりベクトル n を表現する。このとき、各座標軸方向の単位ベクトルは以下の式で定義される。

$$x = r e, \quad r = |x| \quad (8)$$

$$n = (\sqrt{1-b^2}) d + b e \quad (9)$$

$$d(\phi) = \cos \phi p + \sin \phi q \quad (10)$$

ただし、 p は e に垂直な面上に選んだ単位ベクトルであり $q = e \times p$ である。このとき、 $n \cdot x$ は次式のようになる。

$$n \cdot x = (a d + b e) \cdot r e = r b \quad (11)$$

このような座標変換により、単位球面上の面積分を b と ϕ での二重積分として数値積分する必要があるため計算時間がかかる。

2.2 BEM プログラムの高速化 定常振動解析に要する計算時間を短縮するため、次式のように積分の対象となる要素を構成する節点において基本解の値をまず求め、内挿関数で補間する。

$$\begin{aligned}
 c_{IJ}(\xi)U_I(\xi) &= \sum_{j=1}^8 \left[\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sum_{i=1}^8 \left\{ \phi^i(\xi) U_{IJ}^{*i}(\xi) \right\} \phi^j(\xi) \right. \\
 &\quad \times |G(\xi)| d\xi_1 d\xi_2 \Big] T_I^j \\
 &\quad - \sum_{j=1}^8 \left[\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sum_{i=1}^8 \left\{ \phi^i(\xi) T_{IJ}^{*i}(\xi) \right\} \phi^j(\xi) \right. \\
 &\quad \times |G(\xi)| d\xi_1 d\xi_2 \Big] U_I^j
 \end{aligned} \quad (12)$$

ただし、 ϕ は内挿関数、 ξ_1, ξ_2 は解析対象の座標を無次元化した際の座標、 $|G(\xi_1, \xi_2)|$ はヤコビアンである。この式を解析対象の全範囲で適用した場合では、基本解の計算回数は、四角形二次要素を用いた場合において Gauss の数値積分点数を 8 点としたとき、8 分の 1 に減らすことができる。

3. 解析例

計算時間を比較するための解析例として図 2 のようなモデルを直交異方性体として解析する。このモデルに対して、境界節点数 170 点を図示のように取り、2 次要素を用いて 56 要素に分割した。境界条件は、直方体の左側の面において x 軸方向のみを支持し、電位を 0 [V]、右側の面において調和加振力 1 [MPa] を与え、電位を 6 [V] とした。また、異方性の主軸は解析対象の座標軸と一致しており弾性定数を表 1 とし、圧電定数をすべて 0、誘電率を $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = 1$ 、密度を 6000 [kg/m³]、角振動数を 9.32×10^3 [rad/s] とする。

この解析を図 3 に示す影付きの範囲において式 (12) を適用して計算を行った。適用範囲による計算時間と計算精度の比較を表 2 に示す。計算精度は、厳密解との相対誤差の最大値を示している。ただし、特異積分が必要となる場合には、式 (12) を適用していない。計算には Apple Computer 社製の iMac G3 400MHz を用い、Pro Fortran 6.0 を用いてコンパイルして計算を行った。基本解の値を内挿する関数は、解析対象の形状を内挿する関数と同じものを用いた。

$L/l = 1.0$ までの範囲ならば、精度の良い結果が得られていることがわかる。しかし、 L/l をそれ以上小さくすると、精度が悪くなることがわかった。

Fig. 2 Analysis model

Fig. 3 Area for efficient integration scheme (shaded region)

Table 1 Elastic constants of an anisotropic material

$C_{11}(=C_{22})$	162
C_{12}	92
$C_{13}(=C_{23})$	69
C_{33}	181
$C_{44}(=C_{55})$	46.7
C_{66}	35.2

unit: [GPa]

Table 2 Results for computation time and relative error [%]

L/l	CPU [sec]	Error of U_1	Error of T
∞	8735	0.022	0.036
2.0	5093	0.046	0.758
1.5	4364	0.047	0.533
1.0	4053	0.077	0.955
0.5	3118	0.918	13.837
0.0	2799	6.821	46.776

参考文献

- (1) B. Jaffe, W.R. Cook Jr., H. Jaffe, *Piezoelectric Ceramics*, Academic Press Limited, (1971).
- (2) 大橋義夫, 神谷紀生, 異方弾性体の理論, 森北出版, (1975).
- (3) A.N. Norris, Dynamic Green's functions in anisotropic piezoelectric, thermoelastic and poroelastic solids, *Proc. R. Soc. Lond., A* **447**, (1994), pp. 175-188.