923 信頼性評価における FORM と PMA との比較

Comparison of reliability evaluation methods between FORM and PMA

○正 小木曾 望 (阪府大工)

Nozomu KOGISO, Osaka Prefecture University, 1-1 Gakuen-cho, Sakai, Osaka 599-8531

A new reliability evaluation method, the performance measure approach (PMA) has been proposed by K. K. Choi for the reliability-based optimization. The method is said to be more efficient in evaluating inactive reliability constraint than the first order reliability method (FORM). However, the method has several weak points such as difficulty of a system reliability evaluation. In this paper, the efficiency of PMA is compared with that of FORM from a viewpoint of the mathematical formulation and calculation efficiency of reliability analysis and reliability-based optimization.

Key Words: Structural Reliability, Performance Measure Approach, First Order Reliability Method, Reliability-Based Optimization

1 はじめに

信頼性に基づく最適設計のための構造信頼性評価手法として, K. K. Choi により, Performance Measure Approach(PMA) が提案されている⁽¹⁾. この手法は従来の一次信頼性法 (FORM)⁽²⁾とは逆に, 標準正規空間 (U -空間) において原点を頂点とする超球面上で限界状態関数の最小値を求める方法である. その最小値が 0 となる場合は超球の半径が信頼性指標と一致するが, そうでない場合は信頼性評価を行ったことにはならない.

しかしながら, PMA は, 信頼性に基づく最適設計問題において, 信頼性制約が不活性となる場合には FORM よりも高い計算効率が可能であると言われていた⁽¹⁾. したがって, FORM と PMA とを使い分けることで, 信頼性に基づく最適設計のさらなる計算効率向上の可能性がある^(3,4).

しかし, この新しい手法はまだ十分に広まっているとは言えない. 特に, システム信頼性の評価が困難であるなどまだ問題点もある. そこで, 本稿では, 最適設計への応用や信頼性評価の点から, PMA を FORM と比較する.

2 Performance Measure Approach (PMA)

PMA は, FORM とは逆に, U 空間の原点を中心とした半径 β_t の超球上で, 限界状態関数 $g(u)$ が最小となる点を求める手法である.

$$\begin{aligned} &\text{Minimize : } g(u) \\ &\text{subject to : } \|u\| = \beta_t \end{aligned} \quad (1)$$

この最小点を u_p^* と表す. 最小点において $g(u_p^*) = 0$ であれば β_t は信頼性指標と一致するが, そうでない場合にはこの解自体には意味がない.

ここで, 次式の信頼性制約のある最適化問題を考える.

$$\begin{aligned} &\text{Minimize : } \text{Cost}(x, u) \\ &\text{subject to : } \beta(x, u) \geq \beta_t \\ &\quad x^L \leq x \leq x^U \end{aligned} \quad (2)$$

なお, x が設計変数を, u が標準正規分布に変換された確率変数である. PMA では, 信頼性指標がある値 β_t 以上という制約を次式で置き換える.

$$g(x, u_p^*) \geq 0, \quad |u_p^*| = \beta_t \quad (3)$$

これは, U -空間における半径 β_t の超球面上が破損領域とならないような設計変数を求めることを意味し, 信頼性指標が β_t 以上という制約と同じ意味である.

最適設計の計算効率を考えると, 初期設計の選択が重要になる. しかし, 一般には最適解があらかじめ分からないため

Fig. 1: Reliability constraint evaluation by PMA.

に, 初期設計として信頼性制約とかけ離れた設計が選ばれることが多い. その信頼性指標が大き過ぎる場合, FORM による信頼性評価では計算効率が悪く, 場合によっては評価ができなくなる. それに対して, PMA では比較的容易に解を求めることができる⁽¹⁾.

元の論文⁽¹⁾では, FORM の不具合を確率変数 z_i が一様分布 $[a_i, b_i]$, ($i = 1, 2$) にしたがう二次元問題で説明している. Fig. 1(a) に示すように区間 $[a_i, b_i]$ の全領域が安全領域で, 限界状態関数が存在しない場合は, β が無限大 (破損確率 $P_f = 0$) になるために, FORM では解を得ることができない. しかし, PMA では, 信頼性指標が得られるわけではないが, Fig. 1(b) に示すように, 問題 (1) の解 u_p^* は得ることはできる.

確率変数 z が一様分布でない場合でも, 信頼性指標が大きくなると FORM では解くのが困難になる問題はある. 例えば, ヤング率を正規分布に仮定する場合を考える. 正規分布は区間 $[-\infty, \infty]$ の領域をもつため, 物理的には存在が不可能な負のヤング率を持つ確率がゼロではない. 信頼性指標が大きくなると, 設計点 u^* でそのような領域に入ってしまうかもしれない. その場合は物理的に限界状態関数の解析が不可能になってしまうであろう. しかし, PMA を用いれば, そのような領域を探索する必要はない.

もともと, 信頼性解析では $P_f = 0$ あるいは信頼性指標が莫大になるような問題を解く必要はなかった. このことは問題にすらならなかった. しかしながら, 信頼性制約に基づく最適設計問題が解かれるようになってから, FORM で信頼性指標が得られないために最適設計計算を先に進めることができないという不具合はいくらか認識されるようになってきた. FORM の定式化で β の範囲に制約を課するなどの防衛策で対応しなければならなかった. PMA はこの問題を根本的に解決する画期的な手法である⁽¹⁾.

最適設計における収束状況を Fig. 2 の模式図に示すが, 信頼性解析にどちらの手法を用いても, 同じ最適解に収束するはずである. しかし, その経路は異なり, 収束に達するまでの計算時間も異なる. 計算効率をより上げるために, 両者の

Fig. 2: Iteration history of reliability-based optimization.

性質を利用したハイブリッド法などが提案されている⁽⁴⁾。なお、FORM ではすべての繰り返しにおいて信頼性を評価しているが、PMA では信頼性制約が活性とならない限り、信頼性の評価が行われているわけではないことに注意しなければならない。

3 感度解析

最適設計を効率的に行うには、感度解析が重要となる。

FORM の場合、 k 番目の設計変数 x_k に関する信頼性 β の感度は以下のように定式化できる⁽²⁾。

$$\frac{\partial \beta}{\partial x_k} = \frac{1}{|\nabla_u g(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*)|} \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*)}{\partial x_k} \quad (4)$$

ここで、 $\nabla_u g(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*)$ は設計点 $\mathbf{u}^*$ における限界状態関数の勾配であり、これは FORM による信頼性指標と設計点の関係から既に求められている。

$$\mathbf{u}^* = -\beta \frac{\nabla_u g(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*)}{|\nabla_u g(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*)|} \quad (5)$$

限界状態関数の設計変数に関する微分は次式で表される。

$$\frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*)}{\partial x_k} = \nabla_u^T g(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*) \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial x_k} \quad (6)$$

$\partial \mathbf{u}^* / \partial x_k$ は設計変数と確率変数との関係から得られるので、通常、容易に求めることができる。

一方、PMA の場合は、 $g(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ の $\mathbf{u}_p^*$ における勾配が必要である。これは、式 (6) と同様を求めることができる。

$$\frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{u}_p^*)}{\partial x_k} = \nabla_u^T g(\mathbf{x}, \mathbf{u}_p^*) \frac{\partial \mathbf{u}_p^*}{\partial x_k} \quad (7)$$

FORM と同様、 $\mathbf{U}$ -空間の原点から $\mathbf{u}_p^*$ に向かうベクトルが、 $\mathbf{u}_p^*$ における限界状態関数の勾配とちょうど逆方向になるため、式 (5) と同様に、式 (7) 第 1 項は求められる。式 (7) 第 2 項も、FORM の場合と同様に、設計変数と確率変数との関係から求めることができる。

したがって、FORM、PMA どちらの場合も信頼性解析を終えた段階で、感度解析に必要な情報が得られているため、計算量はほとんどかからない。

4 問題点

4.1 システム信頼性 ここまで、信頼性制約として一つの破損モードに対する制約しか考慮していなかった。しかし、一般には複数の破損モードが存在し、システム信頼性を考慮しなければならない。

まず、単純限界値で表される場合を考える。

$$\beta_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \geq \beta_{ti}, \quad (i = 1, \dots, n_m) \quad (8)$$

Fig. 3: Problem with multiple failure modes.

Fig. 4: Joint failure probability

ここで、 n_m は破損モード数である。PMA では、Fig. 3 に示すように、モード信頼性の大小に関わらず解が求められるので、あらかじめ卓越する破損モードを選択する必要がない。

さらに、何らかの工夫をすれば、卓越する破損モードの抽出も可能となるであろう。ただし、境界状態関数値 $g_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}_p^*)$ の大小から直接導き出すことはできないことに注意する。

問題点としては、ディトレブセン限界値⁽⁵⁾で必要になる同時破損確率があげられる。同時破損確率の評価には、Fig. 4 に示すように、各破損モードに対する信頼性指標が必要となる。しかし、PMA ではこれらを求めていないため、同時破損確率を直接評価することができない。

4.2 信頼性最大化設計 信頼性に基づく最適設計として、式 (2) の双対問題として、次式で示す信頼性最大化問題がある。

$$\begin{aligned} \text{Maximize : } & \beta(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\| \\ \text{subject to : } & f(\mathbf{x}) \leq 0 \end{aligned} \quad (9)$$

この問題では、信頼性があらかじめわかっているわけではないので、直接、PMA を適用することができない。これに対する有効な手法の開発が必要になってくるであろう。

5 終わりに

PMA は、信頼性制約のある最適設計問題に対して、FORM では不可能になる特異性を避けることができる画期的な手法である。最適設計の初期設計に対する制限がないことから、現実問題への適用が広がることが期待される。

しかし、PMA には、同時破損確率の評価などいくつかの課題が存在するため、今後も改良が必要になるであろう。

参考文献

- (1) Tu, J., Choi, K. K., and Park, Y. H., *Trans. ASME J. Mech. Design*, **121**, (1999) 557-564.
- (2) Madsen, H. O., Krenk, S., and Lind, N. C., *Methods of Structural Safety*, (1986), Prentice-Hall.
- (3) Tu, J., Choi, K. K., and Park, Y. H., *AIAA J.*, **39**, (2001) 667-677.
- (4) Youn, B. D., Choi, K. K., and Park, Y. H., *Trans. ASME J. Mech. Design*, **125**, (2003) 221-232.
- (5) Ditlevsen, O., *J. Struct. Mech.*, **7**, (1979) 453-472.