1007 移動最小自乗法を用いたひずみ仮定型有限要素法

Assumed strain type FEM using Moving Least Squares Approximation

○ 中原 和洋 (慶大院) 正 野口 裕久 (慶大)

Kazuhiro NAKAHARA, Keio University, 3-14-1 Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama

Hirohisa NOGUCHI, Keio University

Key Words: FEM, Assumed strain, Moving Least Squares Approximation

1. 結言

現在一般的な構造解析による有限要素法において、アイソパラメトリック要素が用いられ、ガウス積分により比較的単純なルーチン構造で数値積分が行われる。しかし、こういった数値積分は、要素が歪むことで、しばしば線形場再現のための「積分拘束」条件を侵害し、解の精度を悪化させる要因となる。

本研究では、Chen らが提案したメッシュフリー法のための節点積分法の考え方⁽¹⁾を有限要素法に応用し、要素内で平均的に一定となるひずみ仮定要素を示す。この様な仮定を課すことで、「積分拘束」条件を満たすことができる。また、解の精度を向上させるために、この要素では節点変位は移動最小自乗法により近似する。以下に本定式化について示した後、本手法の妥当性を種々の数値解析を通じて検討する。

2. 移動最小自乗法

本研究では関数近似手法として移動最小自乗法を用いる。評価点の位置ベクトルを $\mathbf{x}$ 、影響領域内のある変位成分の近似関数を $u^h(\mathbf{x})$ 、節点 I の位置ベクトル (N は影響領域内の節点の数)、ある変位成分値をそれぞれ $\mathbf{x}_I$ 、 u_I 、評価点と節点の距離を r_I 、重み関数を $w(r_I)$ とすれば、 $u^h(\mathbf{x})$ は次の重み付き自乗和を最小にするように決定することができる。

$$J = \sum_{I=1}^N w(r_I) |u^h(\mathbf{x}) - u_I|^2, r_I = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_I| \quad (1)$$

本研究では、重み関数 $w(r_I)$ として以下の多項式を用いる。

$$w(r) = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{r}{\rho}\right)^2 + 8\left(\frac{r}{\rho}\right)^3 - 3\left(\frac{r}{\rho}\right)^4 & (0 \leq r \leq \rho) \\ 0 & (\rho \leq r) \end{cases} \quad (2)$$

最終的に、形状関数 ϕ_I を用いて、近似関数 $u^h(\mathbf{x})$ は

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^N \phi_I(\mathbf{x}) u_I \quad (3)$$

と書き表すことができる。

3. 一定ひずみ仮定

図 1 に示すような 4 つの節点で構成された要素を考える。要素内の領域を Ω_L 、要素の境界領域を Γ_L とし、要素の面積を A_L とする。ここで、要素内ひずみを平均的に一定と仮定すると、要素内のひずみは以下の式で表すことができる。

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}_{\Omega_L}) = \frac{1}{A_L} \int_{\Omega_L} \left(\frac{\partial u_i^h(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^h(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right) d\Omega \quad (4)$$

式 (1) にガウスの発散定理を適用すると、境界領域 Γ_L の法線成分 n_i を用いて、

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}_{\Omega_L}) = \frac{1}{2A_L} \int_{\Gamma_L} (u_i^h(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x}) + u_j^h(\mathbf{x}) n_i(\mathbf{x})) d\Gamma \quad (5)$$

となる。変位ひずみマトリクス $\mathbf{B}$ を導入して書き表すと

$$\varepsilon = \sum_I \mathbf{B}_I u_I \quad (6)$$

$$\mathbf{B}_I = \frac{1}{2A_L} \begin{pmatrix} \int_{\Gamma_L} \phi_I(\mathbf{x}) n_1(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & \int_{\Gamma_L} \phi_I(\mathbf{x}) n_2(\mathbf{x}) \\ \int_{\Gamma_L} \phi_I(\mathbf{x}) n_2(\mathbf{x}) & \int_{\Gamma_L} \phi_I(\mathbf{x}) n_1(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (7)$$

となる。ここで I は要素を構成する 4 つの節点それぞれの影響領域内に含まれる節点群である。

$\mathbf{B}$ マトリクス各成分の境界積分は、節点間の 4 つの線分に対してそれぞれ行い、数値積分手法として、式 (8) に示すように 2 点 (又は n 点) 台形積分を用いることができる。2 点台形積分を用いる場合、積分点が常に節点となるため、節点のみの形状関数の計算を求めただけで良い。

$$\int_{\Gamma_L} \phi_I(\mathbf{x}) n_i(\mathbf{x}) = \sum_{M=1}^4 \frac{1}{2} \{ \phi_I(\mathbf{x}^M) n_i(\mathbf{x}^M) + \phi_I(\mathbf{x}^{M+1}) n_i(\mathbf{x}^{M+1}) \} \quad (8)$$

fig.1 Assumed Strain Element

これにより得られた $\mathbf{B}$ マトリクスを通常の $\mathbf{B}$ マトリクス

と置き換えて用いる。この B マトリクスが「積分拘束」条件を満たすことについては文献 (1) に詳しい。

4. 数値解析例

4.1 片持ち梁のせん断曲げ問題

図2に示すような片持ち梁の自由端にせん断荷重 P を加える問題の解析を行う。要素形状は4角形、節点は等間隔に配置された105節点(21×5)、217節点(31×7)、369節点(41×9)の3通りで行う。影響半径は、 $2.01c$ とする (c は節点間最小距離)。平面応力として解析する。

図3に変位ノルム誤差の結果を示す。比較としてアイソパラメトリック4節点要素の FEM、メッシュフリー法の一つである EFGM(6×6 のガウス積分)結果を示す。提案手法は少ない節点において、他に比べ非常に良い精度が得られるが、節点数増加に伴う精度の向上は少ないことが分かる。図4に $x=5$ で切った断面に隣接した要素におけるせん断応力結果を示す。良好な結果が得られていることが分かる。

fig.2 Analysis model of cantilever beam with a shear end load

fig.3 L_2 norm of error in displacements

fig.4 Shear stress distribution($x=0.5$)

4.2 円孔板の引っ張り問題

図5に示すような円孔板の一樣引っ張り問題の解析を行う。要素形状は4角形、589節点数である。影響半径は $6.6c$ とし、平面応力状態として解析する。

図6に $y=0$ における y 方向応力結果を示す。理論解と比べることで良好な結果が得られていることが分かる。

Young's modulus $E=1$
Poisson's ratio $\nu=0$

fig.5 Analysis model of a plate with a central circular hole

fig.6 Normal Stress σ_y distribution

5. 結言

要素内で一定となるひずみ仮定要素を提案した。数値解析例を通じて、本手法の解の精度の検証および妥当性を示した。本論では4節点の4角形要素による解析結果について検討した。本手法は、要素形状、要素を構成する節点数を変えることが容易であるため、4角形要素以外の要素における本手法の妥当性を示すことが今後の課題である。

参考文献

(1) Chen, J.S., Wu, C.T., A stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods., International Journal for Numerical Methods in Engineering., Vol.50, 2001, pp.435-466