1808 2次精度のマーカ-粒子法による自由表面流れ問題の数値計算

Numerical Computation of Free Surface Flow Problem
Using a Second-Order Accurate Marker Particle Method

○ 繁田 岳美 (山口東理大基礎工)

正 登坂 宣好 (日大生産工)

Takemi SHIGETA, Tokyo Univ. of Science, Yamaguchi, 1-1-1, Daigaku-dori, Onoda, 756-0884

Nobuyoshi TOSAKA, Nihon Univ., 1-2-1, Izumicho, Narashino, 275-8575

Key Words: Finite Element Method, Marker Particle, Heun Method, Free Surface Flow

1 はじめに

自由表面流れ問題を数値的に解く方法の一つとして、マーカ-粒子法^{1),2)}が挙げられる。マーカ-粒子法は、流体領域全体にマーカ-を多数配置し、時間と共に変化する流体の流れを個々のマーカ-の動きで表現する手法である。マーカ-の移動には、通常1次精度を有する Euler 法が用いられる。本論では、流体の流れをより正確に表現するために、2次精度を有する Heun 法を用いてマーカ-を移動させることを考える。2次元の非圧縮粘性流体を対象とし、三角形1次の有限要素法を用いて数値計算する。

2 問題設定

2次元有界領域 $\hat{\Omega}$ を固定領域とし、時刻 t に依存する流体領域 $\Omega(t)$ が $\hat{\Omega}$ 内部に存在する。位置 $\mathbf{x}$ 、時刻 t における流速と単位密度あたりの圧力を、それぞれ $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $p(\mathbf{x}, t)$ と表す。対象とする流体は非圧縮粘性流れであると仮定する。

流体が固定領域の境界に接する部分を $W(t) := \partial\Omega(t) \cap \partial\hat{\Omega}$ 、流体領域 $\Omega(t)$ の自由表面を $S(t) := \partial\Omega(t) \setminus \partial\hat{\Omega}$ で表す (Fig. 1)。

Fig. 1 Fluid domain with a free surface

このとき、問題は次の Navier-Stokes 方程式と連続の式に対する初期値境界値問題として述べられる:

問題 1 以下を満たす $\mathbf{u}$ と p を $\Omega(t) \times (0, T)$ において求めよ:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega(t) \times (0, T), \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega(t) \times (0, T). \quad (2)$$

境界条件として、壁面上では滑り条件:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{on } W(t) \times (0, T),$$

自由表面上では応力の平衡条件:

$$\sigma \mathbf{n} = 0 \quad \text{on } S(t) \times (0, T)$$

を、また初期条件として

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \quad \text{in } \Omega(0) \times \{0\}$$

を課す。ここに、 $T > 0$ は与えられた定数、 Re は Reynolds 数、 $\mathbf{f}$ は $\Omega(t)$ 内で既知の物体力、 $\mathbf{n}$ は境界 $\partial\Omega(t)$ 上の外向き単位法線ベクトル、 $\sigma := -pI + \frac{2}{Re} \varepsilon(\mathbf{u})$ は応力テンソルで、 $\varepsilon(\mathbf{u})$ は $\varepsilon(\mathbf{u}) := \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$ で定義され、 $\mathbf{u}_0$ は既知の初期流速を表す。

3 マーカ-粒子法

初めに、流速修正法を用いて (1), (2) を時間方向に離散化する。第 n 段階時刻を $t_n := t_{n-1} + \Delta t$ ($n = 1, 2, \dots, [T/\Delta t]$) で定める。ただし、 $t_0 = 0$ で、 Δt は時間増分である。真の $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_n)$, $p(\mathbf{x}, t_n)$ に対する半離散近似をそれぞれ $\mathbf{u}^n(\mathbf{x})$, $p^n(\mathbf{x})$ と表す。

次に、半離散化された方程式を Galerkin 有限要素法を用いて空間方向に離散化する。領域 $\hat{\Omega}$ を三角形1次の有限要素に分割し、各時刻において要素分割は固定のままとする。

自由表面を識別するために、流体領域 $\Omega(t)$ 内部全体にマーカ-を一様に配置する。このとき有限要素は、マーカ-を含まない空要素、マーカ-を含み空要素と隣接する表面要素、マーカ-を含み空要素に隣接しない流体要素の3種類の要素に分類される。空要素は液体に接する気相を表し、自由表面は表面要素内部に含まれると考えられる。流体要素と表面要素の全体が近似流体領域を、空要素と表面要素の共有辺の全体が近似自由表面を構成する (Fig. 2)。

Fig. 2 Classification of elements

あるマーカ-の第 n 段階時刻における位置を $\mathbf{x}^n$ とすると、1次精度を有する Euler 法を用いる場合、

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \Delta t \mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{x}^n) \quad (3)$$

に従って、このマーカーは位置 $\mathbf{x}^{n+1}$ へ移動する。ここに、 $\mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{x}^n)$ はマーカーの速度、すなわち位置 $\mathbf{x}^n$ における第 $n+1$ 段階時刻の流速を表し、マーカーを含む要素の節点における流速を補間することで求められる。従って、マーカーが位置する要素を見つける必要が生ずる。そのために、現在マーカーが位置する要素と辺や点で隣接する要素すべてに対して、移動後のマーカーの面積座標の正負を調べる。面積座標がすべて正となる要素が、移動後のマーカーの位置する要素となる。

(3) の代わりに Heun 法:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{x}}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \Delta t \mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{x}^n), \\ \tilde{\mathbf{x}}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \Delta t \mathbf{u}^{n+1}(\bar{\mathbf{x}}^n), \\ \mathbf{x}^{n+1} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{x}}^{n+1} + \tilde{\mathbf{x}}^{n+1}) \end{cases} \quad (4)$$

を用いることで、マーカーの移動が 2 次精度で行われる。そのため、流体の流れがより正確に表現される。

4 数値計算例

本節では、マーカー移動に Euler 法 (3) を用いた数値計算例を示す。Heun 法 (4) を用いた数値計算例は講演時に示す。

初めに水柱崩壊問題を考える。境界が壁面であるような固定領域 $\hat{\Omega}$ を単位正方形とし、初期状態の流体領域 $\Omega(0)$ を幅 0.3、高さ 0.6 の長方形とする。物体力を $\mathbf{f} = (0, -1)$ 、初期流速を $\mathbf{u}_0 = 0$ 、Reynolds 数を $Re = 500$ とする (Fig. 3)。固定領

Fig. 3 Water column breaking problem

域 $\hat{\Omega}$ を計算領域とし、節点数 2601、要素数 5000 の三角形有限要素に一樣分割し、時間増分を $\Delta t = 10^{-3}$ とする。流体領域 $\Omega(0)$ 内部全体に、7021 個のマーカーを一樣に配置する。以上の設定の下で得られたマーカー分布の $t = 3.0, 4.0$ における数値結果を Fig. 4 に示す。

Fig. 4 Marker distributions

次に液滴落下問題を考える。単位正方形領域 $\hat{\Omega}$ の左下の頂点を原点とするとき、初期の流体領域 $\Omega(0)$ は、中心 $(0.5, 0.8)$ 、

半径 0.1 の円 (液滴) と幅 1、高さ 0.3 の長方形から成るとする。液滴の初期流速を $\mathbf{u}_0 = (0, -2)$ 、長方形の初期流速を $\mathbf{u}_0 = 0$ とし、 $Re = 1000$ とする (Fig. 5)。流体領域全体に 4951 個のマーカーを一樣に配置する。他の条件は先の水柱崩壊問題のときと同様とする。このとき得られたマーカー分布の $t = 0.25, 0.40, 1.00, 2.00$ における数値結果を Fig. 6 に示す。

Fig. 5 Liquid drop falling problem

Fig. 6 Marker distributions

以上の数値結果は定性的には妥当と思われる。しかし、定常状態になったときの流体の面積は初期の流体の面積よりもわずかながら減少していた。この原因の一つはマーカー移動を Euler 法で行ったためと考えられる。従って、Heun 法によりマーカー移動の精度を上げる必要がある。

参考文献

- 1) 数値流体力学編集委員会 編: 数値流体力学シリーズ 4 移動境界流れ解析, 東京大学出版会, 1995.
- 2) Nakayama, T. and Mori, M.: An Eulerian finite element method for time-dependent free surface problems in hydrodynamics, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 22, pp. 175-194, 1996.