0905 一様加熱を受ける不均質中空球の一次元熱弾性解析

One-Dimensional Thermoelastic Analysis of an Inhomogeneous Hollow Sphere
Subjected to Uniform Heat Supply○学 中本 向紀 (阪府大院)
正 河村 隆介 (阪府大院)

正 谷川 義信 (阪府大院)

Koki NAKAMOTO, Graduate School of Engineering, Osaka Prefecture University
Yoshinobu TANIGAWA, Graduate School of Engineering, Osaka Prefecture University
Ryuusuke KAWAMURA, Graduate School of Engineering, Osaka Prefecture University

Key Words: Thermoelasticity, Inhomogeneous Material, Hollow Sphere, One-Dimensional Problem, Uniform Heat Supply

1. 緒 言

著者らは現在まで物性値が座標変数のべき乗形で連続的に変化する不均質体の弾性および熱弾性問題を理論解析してきた。直角座標系および円柱座標系での二次元、三次元問題はすでに定式化がなされている。しかし、球座標系での定式化はまだなされていない。そこで、本研究では解析モデルとして不均質中空球を取り上げ、その力学的特性を顕著に表す一次元問題を理論解析する。以前までの研究で、弾性問題⁽¹⁾については定式化を行い、数値計算結果から物性値の不均質性が応力・変位に及ぼす影響について示した。今回はそれを熱弾性問題へと拡張して、定式化および数値計算を行う。

2. 熱弾性解析

2.1 解析モデル

熱弾性問題の解析モデルを Fig.1 に示す。Fig.1 では、内半径 a 、外半径 b の中空球の、内境界での温度および相対熱伝達率を T_a, h_a 、外境界での温度および相対熱伝達率を T_b, h_b とし、一様加熱される場合を想定する。

Fig.1 Conditions and coordinate systems

2.2 ナビアの方程式の導出

球座標系 (r, θ, ϕ) における点対称問題で、ひずみ成分は r 方向の変位を u_r とすると

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\phi\phi} = \frac{u_r}{r} \quad (1)$$

と表され、応力-ひずみ関係は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \{ (1-\nu)\varepsilon_{rr} + 2\nu\varepsilon_{\theta\theta} - (1+\nu)\alpha T \}, \\ \sigma_{\theta\theta} (= \sigma_{\phi\phi}) &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \{ \nu\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} - (1+\nu)\alpha T \} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

で与えられる。ここで、 E はヤング率、 ν はポアソン比、 α は線膨張係数、 T は温度変化である。

また半径方向の力のつり合いは次式ようになる。

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0 \quad (3)$$

ここでヤング率 E と線膨張係数 α を次式で定義する。

$$E(r) = E_0 \left(\frac{r}{a} \right)^m, \quad \alpha(r) = \alpha_0 \left(\frac{r}{a} \right)^k \quad (4)$$

ただし E_0 と α_0 は、それぞれ基準となるヤング率および線膨張係数、 m と k は、それぞれヤング率および線膨張係数の不均質性を表す任意の数値パラメータである。

式(2)を式(3)に代入して、式(4)を考慮すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial \rho^2} + (2+m) \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \rho} + 2 \left(\frac{\nu m}{1-\nu} - 1 \right) \frac{\bar{u}_r}{\rho^2} \\ = \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} (\bar{\alpha} \bar{T}) + \frac{m}{\rho} \bar{\alpha} \bar{T} \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

式(5)で導入された無次元量は以下のとおりである。

$$\rho = \frac{r}{a}, \quad \bar{u}_r = \frac{u_r}{\alpha_0 T_0 a}, \quad \bar{E} = \frac{E}{E_0}, \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha_0}, \quad \bar{T} = \frac{T}{T_0} \quad (6)$$

ここで、 T_0 は基準となる温度変化である。

2.3 温度解の導出

熱伝導率 λ を

$$\lambda(r) = \lambda_0 \left(\frac{r}{a} \right)^l \quad (7)$$

で定義すると、一次元点対称定常熱伝導方程式は

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \rho^2} + \frac{2+l}{\rho} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \rho} = 0 \quad (8)$$

ただし、 λ_0 は基準となる熱伝導率で、 l は熱伝導率の不均質性を表す任意の数値パラメータである。

式(8)を解いて温度解 $\bar{T}$ を求めると

$$\bar{T} = D_1 \rho^{-(l+1)} + D_2 \quad (9)$$

となる。ただし $l \neq -1$ であり、 D_1, D_2 は熱的境界条件：

$$\left. \begin{aligned} \rho=1; \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial \rho} - H_a \bar{T} &= -H_a \bar{T}_a, \\ \rho=b; \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial \rho} + H_b \bar{T} &= H_b \bar{T}_b \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

から決定される未知定数である。また式(10)で新たに導入された無次元量は以下のとおりである。

$$\bar{T}_a = \frac{T_a}{T_0}, \quad \bar{T}_b = \frac{T_b}{T_0}, \quad \bar{b} = \frac{b}{a}, \quad H_a = a \cdot h_a, \quad H_b = a \cdot h_b \quad (11)$$

2.4 変位・応力の解

式(9)を式(5)に代入して応力と変位の解を求めると

$$\begin{aligned}\bar{u}_r &= C_1 \rho^{\alpha_1} + C_2 \rho^{\alpha_2} \\ &+ \frac{1+\nu}{1-\nu} \left\{ \frac{m+k-1-l}{(k-\alpha_1-l)(k-\alpha_2-l)} D_1 \rho^{k-l} \right. \\ &\quad \left. + \frac{m+k}{(k-\alpha_1+1)(k-\alpha_2+1)} D_2 \rho^{k+1} \right\}, \\ \bar{\sigma}_r &= \frac{\rho^m}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\{(1-\nu)\alpha_1 + 2\nu\} C_1 \rho^{\alpha_1-1} \right. \\ &\quad \left. + \{(1-\nu)\alpha_2 + 2\nu\} C_2 \rho^{\alpha_2-1} \right. \\ &\quad \left. + (1+\nu) D_1 \left\{ \frac{m+k-1-l}{(k-\alpha_1-l)(k-\alpha_2-l)} \left(k-l + \frac{2\nu}{1-\nu} \right) - 1 \right\} \rho^{k-l-1} \right. \\ &\quad \left. + (1+\nu) D_2 \left\{ \frac{m+k}{(k-\alpha_1+1)(k-\alpha_2+1)} \left(k+1 + \frac{2\nu}{1-\nu} \right) - 1 \right\} \rho^k \right], \\ \bar{\sigma}_{\theta\theta} &= \frac{\rho^m}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\{(\nu\alpha_1+1)C_1 \rho^{\alpha_1-1} + (\nu\alpha_2+1)C_2 \rho^{\alpha_2-1} \right. \\ &\quad \left. + (1+\nu) D_1 \left[\frac{1}{1-\nu} \frac{m+k-1-l}{(k-\alpha_1-l)(k-\alpha_2-l)} \{ \nu(k-l)+1 \} - 1 \right] \rho^{k-l-1} \right. \\ &\quad \left. + (1+\nu) D_2 \left[\frac{1}{1-\nu} \frac{m+k}{(k-\alpha_1+1)(k-\alpha_2+1)} \{ \nu(k+1)+1 \} - 1 \right] \rho^k \right] \\ &\quad (k-\alpha_1-l \neq 0, k-\alpha_2-l \neq 0, k-\alpha_1+1 \neq 0, k-\alpha_2+1 \neq 0) \quad (12)\end{aligned}$$

ここで固有値 α_1, α_2 は

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \left\{ -(1+m) \pm \sqrt{(1+m)^2 - 8 \left(\frac{\nu m}{1-\nu} - 1 \right)} \right\} \quad (13)$$

で表される特性方程式の根で, C_1, C_2 は力学的境界条件:

$$\left. \begin{aligned} \rho=1 & ; \bar{\sigma}_r=0, \\ \rho=\bar{b} & ; \bar{\sigma}_r=0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

から決定される未知定数である。また応力の無次元量は以下のとおりである。

$$\bar{\sigma}_r = \frac{\sigma_r}{\alpha_0 E_0 T_0}, \quad \bar{\sigma}_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{\alpha_0 E_0 T_0} \quad (15)$$

3. 数値計算例

2章で得られた解析解を基に数値計算を行った。一例として、計算諸元を次式で与えた。

$$\left. \begin{aligned} \bar{b} &= 1.5, & \bar{T}_a &= \bar{T}_b = 1.0, \\ \nu &= 0.3, & H_a &= H_b = \infty \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

ここでは、不均質性の影響を直接的に見るために、熱伝達は無視せずに熱的境界条件を温度指定とした。

計算結果の一例として、それぞれ Fig.2, Fig.3 に線膨張係数の不均質パラメータ k による半径方向変位 $\bar{u}_r$ 、子午線方向応力 $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ の変化について示す。

Fig.2 より、 $k=0$ の均質体の場合は、 $\bar{u}_r$ は半径とともに直線的に増加する。 $k=1$ の場合は、均質体と比較して変位の絶対値が大きくなる。これは、 k が大きくなることで均質体に比べて球全体の線膨張率が大きくなり、その結果熱ひずみが大きくなるためである。一方 $k=-1$ の場合は、均質体と比較して変位の絶対値は小さくなる。これは、 k が小さくなることで均質体に比べて球全体の線膨張率が小さくなり、その結果熱ひずみが小さくなるためである。

Fig.2 Radial variation of radial displacement $\bar{u}_r$ with inhomogeneity parameter k

Fig.3 Radial variation of circumferential stress $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ with inhomogeneity parameter k

Fig.3 より、 $k=0$ の均質体の場合は、 $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ は零となる。これは、両境界同温度で一様加熱しているため自由熱膨張の状態であるためである。 $k=1$ の場合は、内側で引張応力、外側で圧縮応力が発生している。これは線膨張係数 α が半径方向に大きくなることで、外側での膨張が内側よりもより大きくなるためである。一方 $k=-1$ の場合は、内側で圧縮応力、外側で引張応力が生じる。これは線膨張係数 α が半径方向に小さくなることで、外側での膨張が内側よりもより小さくなるためである。

なお、紙面の都合上ヤング率に関する不均質パラメータ m および熱伝導率に関する不均質パラメータ l の影響については省略する。

4. 結 言

本研究では、解析モデルとして物性値が半径方向に関して任意のべき乗の形で変化する不均質中空球を取り上げ、一次元熱弾性問題について基礎方程式を定式化した。また解析解を基に数値計算を行い、中空球の変位および応力に及ぼす線膨張係数、ヤング率、熱伝導率の不均質性の効果について検討した。

今後は、材料が不均質性と異方性の両方を考慮した場合に対する問題を取り扱ってゆく予定である。

参考文献

- (1) 谷川・中本・河村, 機講論, No.03-26 (2003), 283-284.