1012 四面体二次要素による仮想き裂開口積分法 (VCCM 法) を用いた三次元き裂解析

Three-Dimensional Crack Analysis using Virtual Crack Closure-integral Method (VCCM) for Quadratic Tetrahedral Finite Element

○ 荒木 宏介 (鹿児島大院) 正 岡田 裕 (鹿児島大)

八反田 大介 (鹿児島大院)

Kohsuke ARAKI, Kagoshima University 1-21-40, Korimoto, Kagoshima, 890-0065, Japan

Hiroshi OKADA, Daisuke HATTANDA

Key Words: Stress intensity factor, Energy release, Finite element method, Virtual crack closure-integral method (VCCM)

1. 結論

有限要素法による破壊力学解析の多くで六面体要素が用いられてきた。これは、六面体有限要素が四面体に比べて精度に優ると信じられてきたことや、応力拡大係数やエネルギー解放率などの破壊力学パラメータ計算アルゴリズムが六面体要素の使用をしばしば前提とするためであろう。他方、近年の大規模固体力学解析では四面体要素が使用される場合が多い。四面体要素の場合は自動メッシュ生成プログラムの利用が可能なのである。しかし、六面体要素では複雑構造/固体構造物に対する自動メッシュ生成は困難とされる。そのため筆者らは、大規模破壊力学解析のボトルネックの一つが破壊力学パラメータの計算手法にあると考え、四面体有限要素を用いた仮想き裂開口積分法 (VCCM 法) ⁽¹⁾ の研究を行ってきた。

前報⁽²⁾で示した四面体一次要素の場合に続き、本報では、四面体二次要素に対する VCCM 法の定式化と計算結果を示す。厳密には、本報で展開する手法は仮想き裂開口積分と言うべきかもしれないが、有限要素法解析結果からの計算手順が同じなので、仮想き裂開口積分法⁽¹⁾の一種と考える。

2. 四面体要素を用いた仮想き裂開口積分法 (VCCM 法)

2.1 四面体要素を用いた VCCM 法の定式化 図 1 は、四面体二次要素を用いた場合に見られるき裂前縁近傍の二種類の典型的な要素面配置を表したものである。モード I 変形を仮定し、き裂前縁近傍の応力とき裂開口変位から、三角形領域を解放するために必要なエネルギーを計算する。

$$v_3(r) = \frac{4K_I}{E'} \sqrt{\frac{2r}{\pi}}, \quad \sigma_{33}(r) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad (1)$$

ただし、 v_3 と σ_{33} はき裂前縁近傍のき裂開口変位と垂直応力を表す。また、 r はき裂前縁からの距離、 K_I はモード I 応力拡大係数である。 $E' = E$ (平面応力)、 $E' = E/(1-\nu^2)$ 、 E と ν は材料のヤング率とポアソン比である。

Fig.1 Faces of tetrahedral elements at the crack front.

図 1 に示した二種類の配置に対して図 2 に示すような二種類の三角形領域を仮定する。一要素分 (長さ Δ) き裂が進

展する際に、それらの三角形面で解放されるエネルギー δW_S を次式で表す。

$$\delta W_S = \int_S \frac{1}{2} v_3 (\Delta - r) \sigma_{33}(r) dS \quad (2)$$

Fig. 2 Two kinds of triangular areas

き裂前縁に三つの節点がある場合 (図 2(a)) に対して、式 (2) に式 (1) を場合代入して次式を得る。

$$\delta W_{S_1} = \frac{3}{2} \frac{S_1 K_I^2}{E'} \quad (3)$$

さらに、図 2 (b) のような場合は次式を得る。

$$\delta W_{S_2} = \frac{1}{2} \frac{S_2 K_I^2}{E'} \quad (4)$$

δW_{S_1} と δW_{S_2} を有限要素法解析結果の節点開口変位

($V_3^J|_{S_1}$ 等) と反力 ($P_3^J|_{S_1}$ 等) により表すことができる。

$$\delta \bar{W}_{S_1} = \frac{1}{2} \left(\sum_{J=1}^3 \bar{C}_{S_1}^J P_3^J|_{S_1} V_3^J|_{S_1} \right) \quad (5)$$

$$\delta \bar{W}_{S_2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{J=1}^5 \bar{C}_{S_2}^J P_3^J|_{S_2} V_3^J|_{S_2} \right) \quad (6)$$

ただし、上式の結果は式 (3) や (4) と全く同等とは言えないので、バーを附して表した。また、使用する節点反力は VCCM 計算の対象とする要素面以外の隣接した要素面の影響を受ける。そこで、適切に按分する必要がある、 $\bar{C}_{S_1}^J$ は按分係数である (紙面の都合上詳細は割愛)。また、節点開口変位は、節点反力と対応する節点のものを使用する。そ

のため、式 (5)、(6) $V_3^J|_{S_1}$ 中の上添え字 J の値と図 1 中

V_3^1 等の上添え字 J の値は直接対応しない。

2・2 エネルギー解放率／応力拡大係数の計算 式 (3) ～ (6) を利用してエネルギー解放率や応力拡大係数を計算する。このとき、数値誤差を相殺するための一種の平均操作を行う。例えば、図 3 の面 $S_{I-1} \sim S_{I+2}$ に関する、式 (3) と式 (4) のエネルギー和と式 (5) と (6) のエネルギー和を等しいとおき、以下の式が得る。

$$\begin{aligned} \delta \bar{W}_{S_{I-1}} + \delta \bar{W}_{S_I} + \delta \bar{W}_{S_{I+1}} + \delta \bar{W}_{S_{I+2}} &= \delta W_{S_{I-1}} + \delta W_{S_I} + \delta W_{S_{I+1}} + \delta W_{S_{I+2}} \\ &= \frac{3S_{I-1} + S_I + 3S_{I+1} + S_{I+2}}{2} \frac{K_I^2}{E'} \end{aligned} \quad (7)$$

応力拡大係数 K_I とエネルギー解放率 G_I の関係を用いて次式を得る。

$$G_I = \frac{K_I^2}{E'} = \frac{2(\delta \bar{W}_{S_{I-1}} + \delta \bar{W}_{S_I} + \delta \bar{W}_{S_{I+1}} + \delta \bar{W}_{S_{I+2}})}{3S_{I-1} + S_I + 3S_{I+1} + S_{I+2}} \quad (8)$$

本節では 4 つの要素面を考慮したが、その数には任意性がある。最適数については今後の課題としたい。

Fig.3 Arrangements of element faces and nodes at the immediate vicinity of crack front.

3. 数値解析例

図 4 の貫通き裂問題について始めに述べる。問題の対称性を利用し 1/4 モデルで解析を行った。境界条件は図 4 に示す通りである。四面体二次要素を用い、要素数 53907、節点数 79063、き裂長さに対してき裂先端部分の要素の大きさは 1/160 である。また、1 回の VCCM 計算で用いる要素の数は、き裂前縁近傍の要素の並びから、二種類の三角形領域が同じ数だけ計算に考慮される数である 8 個とした。

Fig.4 Through crack in a tensile plate.

図 5 では二次元の理論解⁽³⁾と数値解を比較した。二次元の理論解との差は 6%程度、最大で 7.13%という結果を得た。Okada ら⁽⁴⁾が六面体要素で行った三次元解析と良好な一致を見た。

図 6 は無限弾性体中の円き裂問題である。問題の対称性を利用し 1/4 モデルで解析を行った。四面体二次要素を

用い、要素数 27663、節点数 40286、き裂長さに対してき裂先端部分の要素の大きさは 1/76 である。また、1 回の VCCM 計算で用いる要素の数は 8 個とした。理論解⁽⁵⁾と比較すると差は 0.05%程度、最大で 0.15%という結果を得た(図 7)。

Fig.5 A comparison between Present and 2D-Analytical

Fig.6 Problem of circular crack in an infinite body.

Fig.7 A comparison between present and Theoretical solution.

4. 結言

本報では、四面体二次要素による VCCM 法を用いた三次元き裂解析をあらわした。無限弾性体内の貫通き裂問題、無限弾性体内の円き裂問題の解析を行い、理論解や数値解⁽⁴⁾と良好な一致をみた。すなわち、四面体二次要素を用いた VCCM 法でエネルギー解放率や応力拡大係数の計算を精度良く行うことができると言える。

今後は、モード II、モード III 変形の解析を行ってゆく予定である。

謝辞：本研究の一部は、造船学術研究推進機構の援助のもとで行った。関係者各位に感謝する。

参考文献

- (1) E. F. Rybicki, M. F. Kanninen, *Engineering Fracture Mechanics*, vol.9 (1977), pp.931-938.
- (2) 岡田・八反田・荒木, M&M 2005 材料力学カンファレンス (2005), 投稿中.
- (2) 岡村弘之, 線形破壊力学, 培風館, 1976.
- (3) H.Okada, M.Higashi, M.Kikuchi, Y.Fukui, N.Kumazawa, *Engineering Fracture Mechanics*, vol.72 (2005), pp.1717-1737.
- (4) Y. Murakami 他 9 名, *Stress intensity factors handbook*, volume 2 (1987), Pergamon Books Ltd.