3008 格子ボルツマン法による自然対流解析

Numerical Computation of Natural Convection by the Lattice Boltzmann Method

○正 瀬田 剛 (富山大) 正 奥井 健一 (富山大)
正 竹越 栄俊 (富山大)

Takeshi SETA, Toyama University, 3190 Gofuku, Toyama-shi, Toyama
Kenichi OKUI, Toyama University
Eisun TAKEGOSHI, Toyama University

Keywords: Computational Fluid Dynamics, Lattice Boltzmann Method, Natural Convection, Forcing Term

1. 緒 言

LBMによる熱流動解析には、1成分の分布関数のみで連続の式、NS方程式、温度方程式、全てを解析する手法^(1, 2)と、温度方程式に対応する分布関数を導入した2成分の分布関数を用いる手法^(3, 4)の2種類の方法がある。2成分系LBMは、1成分系LBMに比べ、プラントル数を任意に設定できるなどの柔軟性がある。また、Pengらは、温度方程式から粘性項と圧力項を無視しても、Heらの2成分LBモデル⁽³⁾と同等の精度で、より高速に自然対流を計算できることを示した⁽⁴⁾。

LBMによって自然対流解析を行う場合、一般に、外力に対しブシネスク近似が用いられるが、レイリー数 Ra が高くなると、外力の影響が大きくなり、計算精度が低下することが指摘されている。この原因は、 Ra 数が高くなると、連続の式が満足されなくなるためと考えられていた。著者らは、Chapman-Enskog展開より、NS方程式に対する外力が、温度方程式に影響を与えることを導き出した。外力の温度方程式への影響が、高 Ra 数における計算精度の低下の要因と考えた。外力を正弦波として与え、波数に対する温度方程式の計算精度を検証することで、外力による温度方程式への影響を検証する。更に、外力の影響を取り除く修正項をLB方程式に導入し、修正項の有効性も調べる。

2. 格子ボルツマン法(LBM)

LBMにより、以下の、連続の式、ナビエ・ストークス方程式、温度方程式を解析する。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} e) = \chi \nabla^2 (\rho e). \quad (3)$$

上記の支配方程式(1)-(2)は分布関数 f_i に対する格子ボルツマン方程式により、温度方程式(3)は分布関数 g_i に対する格子ボルツマン方程式により、それぞれ、計算される。

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \delta_t, t + \delta_t) - f_i(\mathbf{x}, t) = -\frac{f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{eq}(\mathbf{x}, t)}{\tau_v} + \delta_t \phi_i, \quad (4)$$

$$g_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \delta_t, t + \delta_t) - g_i(\mathbf{x}, t) = -\frac{g_i(\mathbf{x}, t) - g_i^{eq}(\mathbf{x}, t)}{\tau_c} + \delta_t \phi_i. \quad (5)$$

ここで、平衡分布関数 f_i^{eq} , g_i^{eq} は、

$$f_i^{eq} = w_i \rho \left[1 + \frac{\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}}{c_s^2} + \frac{\mathbf{u} \mathbf{u} : (\mathbf{c}_i \mathbf{c}_i - c_s^2 \mathbf{I})}{2c_s^4} \right], \quad (6)$$

$$g_0^{eq} = -\frac{2\rho e}{3} \frac{\mathbf{u}}{c^2}, \quad (7a)$$

$$g_{1,3,5,7}^{eq} = \frac{\rho e}{9} \left[\frac{3}{2} + \frac{3}{2} \frac{\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}}{c^2} + \frac{9}{2} \frac{(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2}{c^4} - \frac{3}{2} \frac{\mathbf{u}^2}{c^2} \right], \quad (7b)$$

$$g_{2,4,6,8}^{eq} = \frac{\rho e}{36} \left[3 + 6 \frac{\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}}{c^2} + \frac{9}{2} \frac{(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2}{c^4} - \frac{3}{2} \frac{\mathbf{u}^2}{c^2} \right], \quad (7c)$$

で定義される。 $w_0 = 4/9$, $w_i = 1/9$ ($i = 1, 3, 5, 7$), $w_i = 1/36$ ($i = 2, 4, 6, 8$)である。式(4)の外力項 ϕ_i には、Guoによって提案されたモデル⁽⁵⁾を用いる。

$$\phi_i = w_i \rho \left(1 - \frac{1}{2\tau_v} \right) \left[\frac{\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{F}}{c_s^2} + \frac{\mathbf{u} \mathbf{F} : (\mathbf{c}_i \mathbf{c}_i - c_s^2 \mathbf{I})}{\epsilon c_s^4} \right], \quad (8)$$

式(5)の修正項 ϕ_i は、

$$\phi_i = \frac{\rho e}{3\alpha} \left(\tau_c - \frac{1}{2} \right) \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{F}, \quad (9)$$

であり、式(8)の外力項による温度方程式への影響を排除する働きがある。密度 ρ , 温度 e は分布関数 f_i と g_i によって、それぞれ、次式のように定義される。

$$\rho = \sum_i f_i, \quad \rho \mathbf{u} = \sum_i \mathbf{c}_i f_i + \frac{\delta_t}{2} \mathbf{F}, \quad \rho e = \sum_i g_i. \quad (10)$$

ボルツマン方程式(4), (5)に、Chapman-Enskog展開を適用することにより、巨視的保存式(1)-(3)が導出される。動粘性係数 ν と熱伝導係数 χ は、それぞれ、

$$\nu = \frac{1}{3} \left(\tau_v - \frac{1}{2} \right) c^2 \delta_t, \quad \chi = \frac{2}{3} \left(\tau_c - \frac{1}{2} \right) c^2 \delta_t, \quad (11)$$

と求まる。

3. 計算結果

周期境界条件を用い、正弦波として外力 $\mathbf{F}$ を与えることで、外力 $\mathbf{F}$ による温度方程式への影響を検証する。温度方程式(3)の誤差を、式(9)で示される修正項 ϕ_i を付加しない場合を▲で、付加した場合を●で、図1に示す。実線、破線、点線は、それぞれ、 $\tau_v = 1.5, 1.0, 0.6$ に対する計算結果である。波数が増えるに従い、つまり、外力 $\mathbf{F}$ の勾配が増大するにつれ、温度方程式の誤差が大きくなる。また、全緩和時間 τ_v に対し、修正項 ϕ_i を付加した方が、温度方程式の計

算精度が向上することが分かる。

次に、正方キャビティ内自然対流解析における、修正項 ϕ_i の有効性を検証する。境界条件として、Zou らによって提案された非平衡分布関数に対するバウンス・バック境界条件⁽⁶⁾を用い、断熱境界条件には、Hou らの手法⁽⁷⁾を適用する。修正項 ϕ_i を付加しない場合を▲で、付加した場合を●で、計算結果を図2～図4示す。図2より、Ra 数が高くなると、外力項の影響が強くなり、温度方程式の精度が低下することが分かる。修正項 ϕ_i を導入することにより、計算精度が向上している。図3、4に、緩和時間と、ヌセルト数 (Nu_0 , $Nu_{1/2}$, Nu) の関係を示す。緩和時間が大きくなると、 Nu_0 が極端に低下する。このずれは、修正項を付加することで、緩和されていく。図5に、計算領域全体における、外力 F の勾配の分布を示す。左右壁の等温壁において、外力の勾配が著しく大きくなっている。図3、4における Nu_0 のずれが外力の勾配の影響によるものであり、修正項 ϕ_i によって温度方程式に対する F の影響が除去され、 Nu_0 の低下が緩和されたことが明らかになった。

4. 結 言

2成分の分布関数を用いる LBM における、温度方程式の計算精度に対する外力の影響を検証した。外力の勾配が温度方程式へ影響することが示され、修正項を導入した LB モデルにより、計算精度が向上することが示された。

Fig.1 Dependence of accuracy of the energy equation on wave number of forcing term.

Fig.2 Dependence of error of the energy equation on the relaxation time for the natural convection in square cavity.

参 考 文 献

- (1) FJ Alexander, et al., Phys. Rev. E. 47, 4, r2249, (1993).
- (2) M. Watari, et al., Phys. Rev. E. 67, e036306, (2003).
- (3) X. He, et al., J. Comput. Phys. 146, 282 (1998).
- (4) Y. Peng, et al., Phys. Rev. E 68, 026701 (2003).
- (5) Z. Guo, et al., Phys. Rev. E 65 046308 (2002).
- (6) Q. Zou, et al., Phys. Fluids 9 (6), 1591 (1997).
- (7) S. Hou, et al., J. Comput. Phys. 118, 329 (1995).

Fig.3 The effects of different τ_v on the steady-state Nusselt numbers ($Ra = 10^3$).

Fig.4 The effects of different τ_v on the steady-state Nusselt numbers ($Ra = 10^4$).

Fig.5 Divergence of the forcing term ($\tau_v = 1.1$, $Ra = 10^4$).