132 メッシュ切り替え内蔵時間積分による心臓弁の開閉解析

Analysis of Open and Close Phase of Heart Valve by Changing Connectivity in Time Step

○ 梅谷 信行 (東京大学) 正 久田 俊明 (東京大学)

Nobuyuki UMETANI, Tokyo University, Hongo 7-3-1, Bunkyo-ku, Tokyo
Toshiaki HISADA, Tokyo University, Hongo 7-3-1, Bunkyo-ku, TokyoKey Words: fluid-structure interaction(FSI)analysis, reconnecting,
contact analysis, Lagrangian-Eulerian(ALE)method

1. 緒言

心臓弁の開閉解析において ALE 流体構造強連成解析のような、連成面追跡型のアルゴリズムを用いた場合、流体領域の大変形によって解析メッシュが不連続的に変化する。一方、メッシュが変化するかどうかは、変化した後のメッシュで、支配方程式が満たされるかどうかによって決まってくるので、メッシュの配置を各時間ステップの始めから決定することはできない。そこで本研究では我々が提案する、各ステップごとにメッシュを切り替えながら、力学的平衡条件や質量保存則、時間積分方程式を満足する解を探索する時間積分スキームを用いて心臓弁の開閉解析を行う。

2. 手法

(1)時間積分過程におけるメッシュの切り替え

本手法では、時間積分中に何度もメッシュを切り替えながら解を探索する。時刻 t から時刻 $t+dt$ の解析に陰的時間積分方法を用いる場合、時刻 t での流速と加速度、時刻 $t+dt$ における流速と加速度になんらかの関係式を導入する。一貫した時間積分をおこなうためには、メッシュが変化した場合でもこの関係式が満たされなくてはならない。陰的時間積分法に Newmark 法を用い場合の関係式は

$${}^{t+dt}u = {}^t u + \{\gamma {}^{t+dt}a + (1-\gamma){}^t a\}dt \quad (1)$$

ここで γ は Newmark 法のパラメータである。時間 t におけるメッシュを O とし、 O で離散化された速度を u_o 、加速度を a_o とする。また、時間 $t+dt$ におけるメッシュを N とし、 N 上で離散化された速度を u_n 、加速度 a_n とする。

$$u_o^* = {}^t u_o + {}^t a_o(1-\gamma)dt \quad (4)$$

$$u_n^* = {}^{t+dt}u_n - {}^{t+dt}a_n\gamma dt \quad (5)$$

とする。ここで u^* は時刻 t と時刻 $t+dt$ の間の中間的な時間である。メッシュが変化した後も式(1)を満たすためには、 u_o^* と u_n^* は等しくなければならない。しかし、 u_o^* と u_n^* は表現されるメッシュが異なり内挿関数が異なるので一般的には等しくならない。そこで u_o^* と u_n^* ができるだけ近くなるようにマッピングを行う。マッピングの方法については後に述べる。具体的な手順は以下の通り

1. t の時間におけるメッシュと流速、加速度から、同じメッシュにおける $t+dt$ の解を計算する
2. メッシュの切り替えが必要なければ、時間を進め、step1へ進む、
3. メッシュが切り替え必要ならば、メッシュを切り替える。
4. 切り替え前の流速と加速度から、切り替えた後の流速と加速度をマッピングにより求める。
5. Newmark 法の増分計算を繰り返して、収束した解が求

まると step 2 へ進む

(2)マッピングに伴う圧力振動の発生原因

マッピングの方法が悪いとメッシュを切り替えた後に圧力振動を伴う場合がある。メッシュを切り替えに伴うマッピングを行った際の u^* の変化を du^* とする。マッピング後に運動方程式、質量保存則を満たすように Newmark 法反復計算を行った場合の、マッピング前からの流速場、加速度場の変化を $d^{t+dt}u$ 、 $d^{t+dt}a$ とすると、式(5)より、

$$du^* = d^{t+dt}u - d^{t+dt}a\gamma dt \quad (6)$$

が成り立つ。式(8)の両辺の発散を計算すると

$$\nabla \cdot du^* = \nabla \cdot d^{t+dt}u - \nabla \cdot d^{t+dt}a\gamma dt \quad (7)$$

マッピング後とマッピング前の流速は質量保存則を満たし、発散がゼロであるので、その変化分も発散はゼロである。よって式(7)の右辺第一項はゼロであり、時間積分の誤差の発散に応じて加速度の発散が変化することが分かる。

$$\nabla \cdot d^{t+dt}a = -\frac{1}{\gamma dt} \nabla \cdot du^* \quad (8)$$

Euler 表記された非圧縮性 Newton 流体の Navier-Stokes 方程式

$$\rho {}^{t+dt}a + \rho {}^{t+dt}u \cdot (\nabla \otimes {}^{t+dt}u) = -\nabla {}^{t+dt}p + \mu \nabla^2 {}^{t+dt}u \quad (9)$$

において、加速度のみの変動成分に着目し、速度の変動成分を無視して、式(9)の変動成分のみに対する発散を計算すると、以下のような式が導かれる

$$\nabla^2 d^{t+dt}p \cong -\rho \nabla \cdot d^{t+dt}a = \frac{\rho}{\gamma dt} \nabla \cdot du^* \quad (10)$$

ここで $d^{t+dt}a$ はメッシュ切り替えによって生じた加速度の変化、 ρ は流体の密度である。式(10)より、圧力の変化の大きさはメッシュを切り替えた際における u^* の変化の発散に比例することがわかる。

(3)マッピングに伴う圧力振動の除去

時間積分の一貫性を保つためには時間積分の誤差が小さいほどよい。ここで時間積分の誤差大きさを評価するノルムとして以下のような $H1$ ノルムを用いる。

$$\|u\|^2 = (u, u)_{H1} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \otimes u : \nabla \otimes u) d\Omega \quad (11)$$

前の議論では、メッシュの変化における u^* の発散の変化は、加速度の発散の変化を引き起こし、圧力の変化につながるということがわかった。よって、

$$\nabla \cdot u_n^* = \nabla \cdot u_o^* = -\gamma dt \nabla \cdot {}^{t+dt}a_o \quad (12)$$

を u_n^* が満たすようにすることでマッピングによる圧力の変化を防ぐことができる。式(12)を満たしながら式(11)を最小化する問題は結局のところ式(11)を流速発散値とする定常ストークス流体の問題を解いていることに他ならない。ラグランジュ未定乗数 λ_n を導入して、この問題を新しいメッシュ N 上で弱形式離散化すると、

$$(\delta u_n, (u_n^* - u_o^*))_{H1} + \int_{\Omega} \delta u_n \cdot \nabla \lambda_n d\Omega = 0 \quad \forall \delta u_n \quad (13)$$

$$\int_{\Omega} \delta \lambda_n \nabla \cdot u_n^* d\Omega = -\gamma dt \int_{\Omega} \delta \lambda_n \nabla \cdot {}^{t+dt} a_o \quad \forall \delta \lambda_n \quad (14)$$

となる。境界条件としては、流速境界上 Γ_f と、構造との連成面 Γ_{fsi} において固定境界条件を与える。

$$u_n^* = u_o^* \quad \text{on } \Gamma_{fsi} \text{ and } \Gamma_s \quad (15)$$

3. 問題設定

時間積分手法の妥当性を検証するために、薄い梁が流体の力を受けて撓む問題を2次元で解析した。この問題の解析を行うことにより、流速、加速度のマッピングにおいて、単純な補間による方法と本手法を比較することで、本手法の妥当性を検証する。

まず始めに本問題の模式図を図1に示す。本図に示される梁表面、及び上下の壁面 A-B では滑りなしの条件を与える。右の壁面 B-B は流出口とし、応力ゼロの応力境界条件を与える。そして、左の面 A-A は流入口とし、速度と加速度を与える。速度については毎秒 1.0m の割合で増加させるものとする。

図1 Configuration of the problem

流体は質量密度 $1.0 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ 、粘性係数 $1.0 \times 10^{-3} \text{Pa} \cdot \text{s}$ の Newton 流体とした。この値は常温での水の物性値にほぼ等しい。また、梁は Saint-Venant 体であるとし、物性値として質量密度 $1.0 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ 、ヤング率 100MPa、ポアソン比 0.32、梁の厚み $1.0 \times 10^{-4} \text{m}$ とした。

離散化については、流体要素として P1P1 補間による SUPG・PSPG 法[3]により安定化された ALE 流体要素を用いて離散化した。また梁要素として野口らによって開発された有限回転増分を考慮した4節点 MITC シェル要素[4]を2次元に縮退した2節点梁要素を用いて離散化を行った。また、Newmark 法による時間積分のパラメータは $\gamma = 0.55$ とした。メッシュ制御はヤング率一定の弾性体制御を用いた。メッシュの切り替えについては、各タイムステップ毎に、Delaunay 条件が満たされるように、辺入れ替えのアルゴリズム[5]を用いてメッシュの切り替えを行った。また、要素の大きさにばらつきがないように、要素面積が平均の要素面積の2倍を超えないように、面積が平均の2倍を超える要素について重心に新しい節点を配置した。

4. 結果

$dt=0.25\text{msec}$ として、0秒から0.12秒までの解析を行った。0.12秒後における解析メッシュの様子を図2に示す。梁が移動した領域において流体メッシュの形状が変化していることがわかる。特に梁の先端付近ではメッシュの変化が著しい。メッシュの切り替えはほぼ毎ステップの中で行われた。図3に本手法を用いてマッピングした場合 (M1) と古いメッシュ上の内挿関数を用いてマッピングを行った場合 (M2) の梁先端における表裏の圧力差の時間履歴を示す。本手法を用いた場合は滑らかな圧力履歴が得られるのに対して、既述のように単純な補間によってマッピングを行った場合には圧力の振動が発生していることがわかる。M2において大きな圧力の変化が生じている時間では梁の境界層の中でメッシュの切り替えが行われた時間である。

図2 Fluid mesh at t=0.0 and t=0.12

図3 Pressure difference

5. 今後の課題

各ステップごとにメッシュを切り替えながら、力学的平衡条件や質量保存則、時間積分方程式を満足する解を探索する時間積分スキームを提案した。今後はこの手法を3次元へ拡張し、心臓弁の解析への応用を目指す。また、誤差評価に基づく r 法による節点移動と Reconnecting によるコネクティビティの変化を用いて精度を保ちつつ計算コストを最小化する手法の開発を目指す。

参考文献

- 1) Q. Zhang and T. Hisada, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg 190(2001)6341-6357
- 2) 梅谷信行, 久田俊明 “流体領域の分離融合に対応した時間積分におけるメッシュ切り替え連成解析アルゴリズム” JSME 計算工学講演会講演論文集 p417-418, (2005)
- 3) T.E. Tezduyar, to appear in Encyclopedia of Comput. Mech., John Wiley & Sons, Ltd. (2004)
- 4) H. Noguchi and T. Hisada, Comput. Struct. 47-4/5(1993) 699-710
- 5) Jonathan Richard Shewchuk : Lecture Notes on Delaunay Mesh Generation