139 SPH 法における 2 相問題の理論的検討

Theoretical study of 2 phase flow in SPH method

○正 小原 治樹 (富大), 学 小山 彰規 (富大・院)

Haruki OBARA, Akinori KOYAMA

Toyama University, 3190 Gofuku, Toyama City

1. 結論

既報^{(1),(2)}において我々は, SPH 法の気液 2 相境界における数値に及ぶ数値異常を抑えるため, 2 相流体が分離しない準定常流れモデルをもとに, 緩和計算式を提案した. また, 粒子サイズが異なる場合を検討し, 平均化に当たっては求積点外の粒子の影響を加算するのではなく, SPH 法の基本式に忠実に, 求積点回りの核関数を積分して加算すれば数値誤差を改善できることを示した. しかし粒子サイズが異なる場合の数値誤差は充分小さいとは言えない. 本報告では, 2 相問題の数値誤差を理論的に検討した結果について述べる.

2. 計算モデル

2 流体が分離しない 1 次元準定常流れモデルで検討する. 境界面で密度 ρ , 音速 C が不連続であるが, 準定常流れでは x 方流体境界面で速度, 圧力が連続だから, 図 1, 図 2 の速度, 圧力モデルに示すように, $(1/\rho) \partial p / \partial x$, $\rho C^2 \partial u / \partial x$ は左右流体で連続である. このとき加速度, 圧力増分も本来一様となる. 図において 2 流体の境界面は j^* , j^*+1 粒子の間にある. また左を A, 右を B で表す.

Fig.1 Velocity distribution

Fig.2 Pressure distribution

3. 圧力計算式

1 次元準定常流れでは $dp/dt = -\rho C^2 \partial u / \partial x$ が連続だから, $-\rho C^2 \partial u / \partial x$ の平均値をとり,

$$\begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= -\left\langle \rho C^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right\rangle_i = -\left\langle \frac{\partial(\rho C^2 u)}{\partial x} - u \frac{\partial(\rho C^2)}{\partial x} \right\rangle_i \quad (1) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\rho_j} \rho_j C_j^2 (u_j - u_i) \frac{\partial W_i}{\partial x_j} \end{aligned}$$

を考える. ここで $\partial W_i / \partial x_j$ は求積点 i を中心とする核関数の, j 点における勾配を示し, 通常の計算式の $\partial W_i / \partial x_i$ と異なるから符号が正負逆である. 式(1)の代わりに各粒子の W について積分したのちに加算すれば, 次式となる.

$$\begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= \dots + \rho_{j^*-1} C_{j^*-1}^2 (u_{j^*-1} - u_i) (W_{j^*-1+h/2}^i - W_{j^*-1-h/2}^i) \\ &\quad + \rho_{j^*} C_{j^*}^2 (u_{j^*} - u_i) (W_{j^*+h/2}^i - W_{j^*-h/2}^i) \\ &\quad + \rho_{j^*+1} C_{j^*+1}^2 (u_{j^*+1} - u_i) (W_{j^*+1+h/2}^i - W_{j^*+1-h/2}^i) \\ &\quad + \rho_{j^*+2} C_{j^*+2}^2 (u_{j^*+2} - u_i) (W_{j^*+2+h/2}^i - W_{j^*+2-h/2}^i) + \dots \end{aligned}$$

この式では, 例えば境界面の左右各領域で $\rho_j C_j^2 (u_j - u_i)$ が一様な場合, dp/dt は 0 であるべきだが, $W_{j^*-1+h/2}^i = W_{j^*-h/2}^i$ であることを考慮すると, 左の A 領域では $\rho_{j^*} C_{j^*}^2 (u_{j^*} - u_i) W_{j^*+h/2}^i$ が残り, 右の B 領域では $-\rho_{j^*+1} C_{j^*+1}^2 (u_{j^*+1} - u_i) W_{j^*+1-h/2}^i$ が残る. 即ち, 全体として $[\rho C^2 (u - u_i) W]_A - [\rho C^2 (u - u_i) W]_B$ が残るから, これがジャンプの影響項である. 従って dp/dt の計算において, この項を差し引き,

$$\begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= \sum_{j=1}^n \rho_j C_j^2 (u_j - u_i) (W_{j+h/2}^i - W_{j-h/2}^i) \quad (2) \\ &\quad + [\rho C^2 (u - u_i) W]_B - [\rho C^2 (u - u_i) W]_A \end{aligned}$$

とすればジャンプの影響を除くことができる. 複数の x_k^* ($k=1 \sim m$) 位置に境界面がある場合には

$$\begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= \sum_{j=1}^n \rho_j C_j^2 (u_j - u_i) (W_{j+h/2}^i - W_{j-h/2}^i) \quad (3) \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \{ [\rho C^2 (u - u_i) W]_{B_k} - [\rho C^2 (u - u_i) W]_{A_k} \} \end{aligned}$$

となる. A_k, B_k は k 位置におけるジャンプ左右を表す.

3 次元粒子分布で W^i が W_x^i, W_y^i, W_z^i の積の場合には

$$\begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= \sum_{j=1}^n \rho_j C_j^2 (u_j - u_i) \Delta W_{xj}^i \Delta W_{yj}^i \Delta \left(\frac{\partial W_x^i}{\partial x} \right) \quad (4) \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \Delta W_{xk}^i \Delta W_{yk}^i \{ [\rho C^2 (u - u_i) W_x^i]_{B_k} - [\rho C^2 (u - u_i) W_x^i]_{A_k} \} \end{aligned}$$

となる. ここで $\Delta W_x^i, \Delta W_y^i, \Delta(\partial W_x^i / \partial x)$ は次式である.

$$\Delta \left(\frac{\partial W_x^i}{\partial x} \right)_j = W_{x,j+h/2}^i - W_{x,j-h/2}^i, \Delta W_{yj}^i = \int_{y_j-h/2}^{y_j+h/2} W_y^i dy, \Delta W_{xj}^i = \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} W_x^i dx$$

既報⁽²⁾の流れモデルについて補正なしの dp/dt を図 3 に, 式(2)で補正した値を緩和式の結果と比べ, 図 4 に示す. 左

を $h=1[\text{m}]$ の空気粒子、右を $h=0.1[\text{m}]$ の水粒子とし、平滑長さは $1.0[\text{m}]$ とした。図4の誤差は期待値の2.5%であり、緩和計算式の誤差の1/20程度である。 10^7 オーダーの誤差が 10^3 程度に縮小された。

Fig.3 dp/dt without compensation

Fig.4 dp/dt by equation (2)

4. 加速度計算式

$(1/\rho) \partial p / \partial x$ の連続性を考慮して加速度を求めれば、

$$\frac{du_i}{dt} = -\left\langle \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right\rangle_i = -\left\langle \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right\rangle_i = \sum_{j=1}^n m_j \left[\frac{p_j}{\rho_j^2} + \frac{p_i}{\rho_i^2} \right] \frac{\partial W_i}{\partial x_j} \quad (5)$$

なので、Monaghan の式になる。式(5)の[] の第1項は、積分加算形で

$$\sum_{j=1}^n m_j \frac{p_j}{\rho_j^2} \frac{\partial W_i}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\rho_j} \frac{p_j}{\rho_j} \frac{\partial W_i}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^n \frac{p_j}{\rho_j} [W_{j+h/2}^i - W_{j-h/2}^i]$$

だから、密度ジャンプによる誤差は、 $(p/\rho)_A - (p/\rho)_B$ である。一方、式(5)の[] の第2項は、

$$\sum_{j=1}^n m_j \frac{p_i}{\rho_i^2} \frac{\partial W_i}{\partial x_j} = \frac{p_i}{\rho_i^2} \sum_{j=1}^n \rho_j (W_{j+h/2}^i - W_{j-h/2}^i)$$

だから、ジャンプによる誤差は、 $(p/\rho_i^2)[(\rho W_i)_A - (\rho W_i)_B]$ である。まとめると、密度ジャンプがある場合の補正式は

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_j \left(\frac{p_j}{\rho_j} + \frac{p_i}{\rho_i^2} \rho_j \right) (W_{j+h/2}^i - W_{j-h/2}^i) + \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{p}{\rho} W^i \right)_{Bk} - \left(\frac{p}{\rho} W^i \right)_{Ak} + \frac{p_i}{\rho_i^2} ((\rho W^i)_{Bk} - (\rho W^i)_{Ak}) \right] \quad (6)$$

となる。補正前の加速度を図5に、式(6)で補正した加速度を緩和計算式と比較して図6に示す。期待値 $10[\text{m/s}^2]$ に対する誤差は dp/dt と同程度である。これらの残った誤差は積分加算で物理量の勾配を考慮していないためと思われる。

5. 境界位置が不明の場合の計算式

以上の計算では、境界の位置と境界値が必要である。 x 方向境界面が1カ所で、その速度を $u_B=u_A=u^*$ 、 W^i を $W_{j^*+h/2}^i$ とする。このとき $u_j=u^*$ とし、A側で $(\rho C^2)_A$ 、B側で $(\rho C^2)_B$ を用いて式(2)の右辺第1項を計算すると

Fig.5 du/dt without compensation

Fig.6 du/dt by equation (6)

$(u^*-u_i)[(\rho C^2)_A - (\rho C^2)_B] W_{j^*+h/2}^i$ が残る。これは式(2)の第2項と符号が逆で絶対値が等しい。よって、通常の平均値から、 $u=u^*$ で計算した平均値を差し引いた、

$$\begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= \sum_{j=1}^n [\rho_j C_j^2 (u_j - u_i) - (\rho C^2)_A (u^* - u_i)] \frac{m_j}{\rho_j} \frac{\partial W_i}{\partial x_j} \\ &\quad + \sum_{j=j^*+1}^n [\rho_j C_j^2 (u_j - u_i) - (\rho C^2)_B (u^* - u_i)] \frac{m_j}{\rho_j} \frac{\partial W_i}{\partial x_j} \\ &= \sum_{j=1}^n [\rho_j C_j^2 (u_j - u_i) - (\rho C^2)_A (u^* - u_i)] (W_{j+h/2}^i - W_{j-h/2}^i) \\ &\quad + \sum_{j=j^*+1}^n [\rho_j C_j^2 (u_j - u_i) - (\rho C^2)_B (u^* - u_i)] (W_{j+h/2}^i - W_{j-h/2}^i) \end{aligned} \quad (7)$$

でも補正ができる。この式は u^* が必要だが、境界面位置を必要としない。左右各領域で $\rho_j C_j^2 = \rho_A C_A^2$ 、 $\rho_j C_j^2 = \rho_B C_B^2$ の場合にこの式は、単純に次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= \sum_{j=1}^n \rho_j C_j^2 (u_j - u^*) \frac{m_j}{\rho_j} \frac{\partial W_i}{\partial x_j} \\ &= \sum_{j=1}^n \rho_j C_j^2 (u_j - u^*) (W_{j+h/2}^i - W_{j-h/2}^i) \end{aligned} \quad (8)$$

加速度の場合には、 p_j の代わりに p^* 、 ρ_j の代わりに左右各領域で ρ_A 、 ρ_B として平均値を計算し、通常の平均値から差し引き、

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{dt} &= \sum_{j=1}^n \left[\left(\frac{p_j}{\rho_j} - \frac{p^*}{\rho_A} \right) + \frac{p_i}{\rho_i^2} (\rho_j - \rho_A) \right] (W_{j+h/2}^i - W_{j-h/2}^i) \\ &\quad + \sum_{j=j^*+1}^n \left[\left(\frac{p_j}{\rho_j} - \frac{p^*}{\rho_B} \right) + \frac{p_i}{\rho_i^2} (\rho_j - \rho_B) \right] (W_{j+h/2}^i - W_{j-h/2}^i) \end{aligned} \quad (9)$$

としても補正した値が得られる。 u^* 、 p^* の求め方、複数境界面に適用しにくい点が課題である。

参考文献

- (1) 小原, 末村, 羽多野: SPH 法に関する基礎的研究(第1報 基礎式の検討), 第16回計算力学講演会(2003), pp. 963
- (2) 本田, 小原, 小山, 羽多野: SPH 法に関する基礎的研究(第5報 粒子径が異なる場合の取扱), 第18回計算力学講演会(2005), pp. 575