309 IDO 法による Vlasov-Poisson 方程式の数値的解法

A numerical method for solving Vlasov-Poisson equation with the IDO scheme

- 斎藤 大介, 京都大学, 京都府宇治市五ヶ庄平野, E-mail: saitou@center.iae.kyoto-u.ac.jp
 今寺 賢志, 京都大学, 京都府宇治市五ヶ庄平野, E-mail: imadera@center.iae.kyoto-u.ac.jp
 内海 隆行, 山口東京理科大, 山口県山陽小野田市大学通 1 - 1, E-mail: utsumi@ed.yama.tus.ac.jp
 李 継全, 京都大学, 京都府宇治市五ヶ庄平野, E-mail: lijq@energy.kyoto-u.ac.jp
 岸本 泰明, 京都大学, 京都府宇治市五ヶ庄平野, E-mail: kishimoto@energy.kyoto-u.ac.jp
 Daisuke SAITOU^{*1}, Kenji IMADERA^{*1}, Takayuki UTSUMI^{*2}, Li JIQUAN^{*1}, Yasuaki KISHIMOTO^{*1}

^{*1} Kyoto Univ., Gokasho, Uji, Kyoto, 611-0011, Japan

^{*2} TUS Yamaguchi, 1-1 Daigaku-dori, Sanyou-Onoda, Yamaguchi, 756-0884, Japan

This paper describes a numerical method for solving the Vlasov-Poisson equation in phase space. The method interpolates the profile of the distribution function and its derivatives in x and v_x directions by applying the CIP (Constrained Interpolation Profile) scheme, and then, advects them by using the IDO (Interpolated Differential Operator) scheme in each time step. As an example, the problem of the linear Landau damping is examined. We can apply the method to the 5-dimensional Gyrokinetic Vlasov-Poisson equation system.

1 緒言

核融合プラズマ中の乱流解析を行う有効な手段の 1 つとして、ジャイロ運動論に基づいた位相空間 5 次元の Vlasov 方程式による数値シミュレーションが挙げられる。しかしながらこの場合、ハミルトニアンが多変数関数となるため Splitting 法^[1]をそのまま適用することは出来ず、CIP 法もまた多次元への拡張という観点から直接適用させるのは難しい^[2]。このためここでは、そのような多次元解析に有効とされている IDO 法を用いて Vlasov-Poisson 方程式の数値解析を行うために、その基礎的研究として (1), (2) 式で示される 1 次元 Vlasov-Poisson 方程式

$$\frac{\partial E(x)}{\partial x} = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} f(x, v_x, t) dv_x \quad (1)$$

$$\frac{\partial f(x, v_x, t)}{\partial t} + v_x \frac{\partial f(x, v_x, t)}{\partial x} - \frac{q}{m} E(x) \frac{\partial f(x, v_x, t)}{\partial v_x} = 0 \quad (2)$$

を IDO 法を用いて解き、その数値誤差の検討を行った。

2 IDO 法

IDO 法とは計算対象となる物理量の空間プロファイルを CIP 法を用いて高精度な補間関数で近似し (式 (3))、支配方程式の空間微分をその補間関数に対する微分オペレータと見なすことで、求める物理量の時間発展を容易にした手法である (式 (4))^[3]。またこれにより、時間刻み幅を適切に選択する事によって数値誤差を制御することも可能となる。

$$F(\xi) = a\xi^3 + b\xi^2 + c\xi + d \quad (3)$$

$$\partial_t f = -v_x \partial_x F(x) + \frac{q}{m} E(x) \partial_{v_x} F(v_x) \quad (4)$$

3 数値解析結果

Vlasov-Poisson 系での IDO 法の精度を検証するために、初期摂動を式 (5) の様に与えた時の Landau 減衰のシミュレーションを行った。その際、位相空間を 1 次元の CIP 法を用いて 3 次関数で補間し、また Vlasov-Poisson 方程式の性質上、高次微係数を導出するのは困難であるため、時間発展には 3 次の Runge-Kutta 法を用いた。この結果 Fig.1 の様な電場の減衰が

得られ、点線で示される減衰率の理論値 ($\gamma = -0.1533$) と非常に良く一致しており、Recurrence もまた理論値 ($T_r = 38.96$) 通り起きている事が判る。

$$f(x, v_x, 0) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{-\frac{v_x^2}{2}} (1 + A \cos(kx)) \quad (5)$$

Fig.1. Amplitude of the electric field for the linear Landau damping with recurrence effect. Number of partitions for $M_x = 24$ and $N_{v_x} = 31$, $L = 4\pi$, $V_{max} = 5.0$, $\Delta t = 1/40$, $A = 0.01$, $k = 0.5$

4 結言

適切な空間、時間精度を保つように刻み幅を設定することにより、IDO 法を用いて Vlasov 方程式を十分正確に解けることが示された。また、2 次元 CIP 法を用いた場合と比較して、その参照点の少なさから高次への拡張により適しており、5 次元のジャイロ運動論的 Vlasov-Poisson 方程式系への適用が期待出来る。

References

- [1] T.Nakamura, and T.Yabe, *Comput. Phys. Commun.*, **120** (1999) p.122.
- [2] T.Utsumi, T.Kunugi, and J.Koga, *Comput. Phys. Commun.* **108** (1998) p.159.
- [3] T.Aoki, *Comput. Phys. Commun.*, **120** (1997) p.132.