303 特性有限要素法による自由界面問題の 表面張力計算に関する検討

Characteristics Finite Element Simulations of Surface Tensions in free interface

○奥村 弘 (富山大)¹⁾ 丸岡 晃 (八戸高専)²⁾

¹⁾Hiroshi OKUMURA, University of Toyama, 3190 Gofuku, Toyama City, Toyama

²⁾Akira MARUOKA, Hachinohe National College of Technology

In this paper we propose a new approximation of upwind streamlines in a framework of the Hermitian characteristic Galerkin (HCG) method for advection diffusion problems. The HCG method applies the Hermitian type element which can improve accuracy of the characteristic Galerkin method. We present a new high order method using the Newmark scheme for the approximation of upwind streamlines, which is often used for the dynamic structural analysis. We show the effectiveness of the present method by evaluating the computational accuracy.

Key Words : Newmark, characteristic Galerkin, upwind streamlines, Hermite element

1. はじめに

本論文では、自由界面流れの数値計算に対する Semi-Lagrange Galerkin (SLG) 法¹⁾の定式化を導き、数値実験により本手法の有効性を検証する。なお、数値実験としては、ダムブレイク問題²⁾を取り上げ、実験結果との比較を行う。

2. 支配方程式と計算方法

混ざり合わない2流体問題に対して、非圧縮 Navier-Stokes 方程式とオイラー的アプローチにおける界面の移流方程式を支配方程式とする。界面 Σ において以下の条件を与える：

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(2)} \\ \sigma^{(1)} \cdot \mathbf{n}^{(1)} - \sigma^{(2)} \cdot \mathbf{n}^{(1)} = \sigma \kappa \mathbf{n}^{(1)} \end{cases} \quad \text{on } \Sigma \quad (1)$$

ここで、 σ は表面張力係数、 κ は界面 Σ の曲率を表す。条件 (1) は界面における流速および応力の法線成分の連続性を示しており、第1式は運動学的条件、第2式は動力学的条件と呼ばれている。

本研究では、移流計算と非移流計算を分離する Semi-Lagrange 法を適用する。有限要素近似には Hermite 型三角形3次要素を用いる。Hermite 型三角形3次要素では、任意のスカラー関数 u に対して、三角形要素の頂点での関数値 u_i とその1階導関数値 $(\frac{\partial u}{\partial x}|_i, \frac{\partial u}{\partial y}|_i)$ 、さらに要素の重心での関数値 u_e を自由度とする10自由度の三角形要素を用いる。この要素は、完全3次補間となり、面積座標によって補間関数を陽的表示できる¹⁾。特性法に基づく SLG 法では、未知量に1階導関数値が含まれるため、界面上の法線ベクトルと曲率が精度よく計算することができる。

3. 数値実験と結論

数値実験として、ダムブレイク解析^{2),3)}を行う。計算条件は文献^{2),3)}と同じである。

図-1 壁部下端での水際線 x_1/a の無次元時刻歴

図-2 壁部左端での水際線 $x_2/2a$ の無次元時刻歴

図1は、壁部下側の水際線の無次元時刻歴 $\tilde{t} = t(2g/a)^{1/2}$ について、既存の実験結果^{2),3)}と本手法による計算結果を比較したものである。また、図2は、壁部左側の水際線の無次元時刻歴 $\tilde{t}$ であり、本手法の計算結果は、どちらの実験値とも良い一致を示している。

$t = 0.0$ ($\tilde{t} = 0.0$)

$t = 0.2$ ($\tilde{t} = 2.318$)

$t = 0.4$ ($\tilde{t} = 4.637$)

$t = 0.6$ ($\tilde{t} = 6.955$)

図-3 計算結果: 時刻 t 秒 (無次元時刻 $\tilde{t}$) と界面の形状

参考文献

- 1) 丸岡, 小保内, 奥村, 移流拡散問題における Semi-Lagrange Galerkin 法, ながれ, 27, 2008, pp.143-152.
- 2) S. Koshizuka & Y. Oka: Moving-Particle Semi-implicit Method for Fragmentation of Incompressible Fluid, Nucl. Sci. Eng. 123, 421-434 (1996)
- 3) J. C. Martin & Moyce. W.J. : An experimental study

$t = 0.0$

$t = 0.2$

$t = 0.4$

$t = 0.6$

図-4 実験結果²⁾: 時刻 t 秒ごとのスナップショット

of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane, Phil. Trans. Roy. Soc. London A, Vol. 244, pp.312-324, 1952.

- 4) Renoto N. Elias & Alvaro L.G.A. Coutinho: Stabilized edge-based finite element simulation of free-surface flows, Int. J. Numer. Meth. Fluids, Vol. 54, pp.965-993 (2007)