1401 減衰シートを挟んだFRP 積層平板の自由振動解析

Free Vibration Analysis of FRP Laminated Composite Plates with Damping Sheets

○学 金子 剛士(北海道工大院)
正 千葉 一永(北海道工大)

正 太田 佳樹(北海道工大)

Tsuyoshi KANEKO, Graduate school, Hokkaido Institute of Technology, Maeda 7-15-4-1, Teine-ku, Sapporo
Yoshiki OHTA, Hokkaido Institute of Technology
Kazuhisa CHIBA, Hokkaido Institute of Technology

This paper presents the free vibration analysis of FRP laminated composite plates with damping sheets. For this purpose, the governing equations are formulated for a cross-ply laminated, simply-supported rectangular plate based Discrete-Layer Theory (DLT), Higher-order Shear Deformation Theory (HSDT) and Classical Lamination Theory (CLT), respectively. In the numerical examples, natural frequencies and specific damping capacities are calculated numerically for the plates with different damping sheet thickness by assuming complex elastic modulus. Finally the applicability of each analytical model for damped vibration analysis is studied by comparing with numerical results obtained respectively.

Key words: FRP laminated composite plate, Damping sheet, Natural frequency, Specific damping capacity

1. 序論

繊維強化プラスチック (FRP) は繊維を用いてプラスチックを補強することで比強度や比剛性を向上させた材料である。そして、このFRP材料は航空産業、宇宙産業、自動車産業、スポーツ用品など様々な分野で用いられている⁽¹⁾。一方、近年構造材料自体の減衰機能を向上させるため、FRP ラミナの層間に粘弾性材料 (減衰シートと称する) を挟んだ積層材料⁽²⁾が開発されてきている。しかし、このように材料特性が極端に違う材料を積層している積層板に関して、各解析モデルの適用範囲等については十分検討されていない。

そこで本研究では、減衰シートを挟んだ FRP 積層平板の自由振動問題を取り上げ、離散層別理論 (DLT) に基づいて周辺単純支持されたFRP積層平板の振動数方程式を定式化する⁽³⁾。そして、解析結果に基づく数値計算により、FRP 積層平板の固有振動数と比減衰容量を求める。なお、本研究では解析モデルの違いの影響を検討するために、古典積層理論 (CLT) と高次せん断変形理論 (HSDT) に基づく同様の定式化・数値計算も実施し、数値結果の比較により各解析モデルの妥当性を検討する。

2. 離散層別理論を用いた振動解析

図1に積層平板 (層数 $2N$) の形状と座標系を示す。図に示すように、積層平板の幅と奥行きをそれぞれ a, b 、厚さを H とし、座標 (x, y, z) をとる。また、任意の点における x, y, z 方向の変位をそれぞれ u, v, w で表わす。

図2は線形補間関数を用いた場合に、離散層別理論で仮定される x 方向の面内変位 u の分布である。ここで u_0 は中央面における変位を表しており、 $u_0 + U_j$ が j 番目の層上面における変位を表している。この仮定に基づく、各方向の変位 u, v, w は

Fig. 1 Dimensions and coordinates of a laminated plate

Fig. 2 Assumption of the displacement u in DLT

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + \sum_{j=1}^{2N} U_j(x, y, t) \phi^j(z) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + \sum_{j=1}^{2N} V_j(x, y, t) \phi^j(z) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ただし

$$\phi^j(z) = \begin{cases} \frac{z_{j+1} - z}{z_{j+1} - z_j} & : z_j \leq z \leq z_{j+1} \\ \frac{z - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} & : z_{j-1} \leq z \leq z_j \\ 0 & : \text{other} \end{cases}$$

と表すことができる。ここで u_0, v_0, w_0 はそれぞれ中央面における x, y, z 方向の変位であり、 $\phi^j(z)$ は線形補間関数である。また、変位とひずみの関係式は

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \sum_{j=1}^{2N} \frac{\partial U_j}{\partial x} \phi^j$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \sum_{j=1}^{2N} \frac{\partial V_j}{\partial y} \phi^j \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \sum_{j=1}^{2N} V_j \frac{\partial \phi^j}{\partial z} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \sum_{j=1}^{2N} U_j \frac{\partial \phi^j}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) + \sum_{j=1}^{2N} \left[\left(\frac{\partial V_j}{\partial x} + \frac{\partial U_j}{\partial y} \right) \phi^j \right] \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

と表せる。一方、応力とひずみの関係式は

$$\left\{ \begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{Q}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{Q}_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{matrix} \right\} \quad (3)$$

となる。ここで上式中の $\overline{Q}_{ij}$ は FRP 材料または減衰シートの材料定数、繊維配向角から得られる弾性定数⁽¹⁾である。

式(1)で与えられる変位を仮定した場合、運動方程式は変分原理により

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^{2N} I^j \frac{\partial^2 U_j}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^{2N} I^j \frac{\partial^2 V_j}{\partial t^2} \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} &= I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M_x^j}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^j}{\partial y} - Q_x^j &= I^j \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + \sum_{k=1}^{2N} I^{jk} \frac{\partial^2 U_k}{\partial t^2} \\ &\quad (j=1, 2, \dots, 2N) \\ \frac{\partial M_{xy}^j}{\partial x} + \frac{\partial M_y^j}{\partial y} - Q_y^j &= I^j \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + \sum_{k=1}^{2N} I^{jk} \frac{\partial^2 V_k}{\partial t^2} \\ &\quad (j=1, 2, \dots, 2N) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

と求められる。ここで上式中の N_x , N_y , N_{xy} , Q_x , Q_y , M_x^j , M_y^j , M_{xy}^j , Q_x^j , Q_y^j は合応力、合モーメント、 I_0 , I^j , I^{jk} は慣性量でありそれぞれ次のように定義される。

$$\left. \begin{aligned} (N_x, N_y, N_{xy}, Q_x, Q_y) &= \int_{-H/2}^{H/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}) dz \\ (M_x^j, M_y^j, M_{xy}^j) &= \int_{-H/2}^{H/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \phi^j dz \\ (Q_x^j, Q_y^j) &= \int_{-H/2}^{H/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) \frac{d\phi^j}{dz} dz \\ (I_0, I^j, I^{jk}) &= \int_{-H/2}^{H/2} \rho (1, \phi^j, \phi^j \phi^k) dz \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここで上式中の ρ は FRP 材料または減衰シートの密度である。

本研究では積層平板が周辺単純支持された場合を考えるので、この境界条件を満たす変位関数は

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= H U_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \omega t \\ v_0 &= H V_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \sin \omega t \\ w_0 &= H W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \omega t \\ U_j &= H X_{mn}^j \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \omega t \quad (j=1, 2, \dots, 2N) \\ V_j &= H Y_{mn}^j \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \sin \omega t \quad (j=1, 2, \dots, 2N) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

と与えることができる。ここで、上式中の U_{mn} , V_{mn} , W_{mn} , X_{mn}^j , Y_{mn}^j は未定係数、 m, n は振動モードの半波数、 ω は円振動数である。

最後に式(2)を式(3)に代入し、これと式(5)を用いて運動方程式(4)式を u_0, v_0, w_0, U_j, V_j で表し、さらに(6)式を代入すると振動数方程式

$$[K] - \lambda^2 (1 + j\eta) [M] = 0 \quad (7)$$

が得られる。ここで、上式中の $[K]$ は剛性マトリックス、 $[M]$ は質量マトリックスである。ここで上式中の $\lambda = (\rho H a^4 \omega^2 / D_0)^{1/2}$; D_0 は代表曲げこわさは無次元振動パラメータであり、 η は比減衰容量である。なお、本研究では弾性定数に複素数弾性定数を用いて、複素数固有値問題として本問題を取り扱う。

3. 数値計算結果および考察

本数値計算において用いた FRP ラミナの材料定数を表 1 に、減衰シートの材料定数を表 2 に示す。

表 3, 4 は DLT および CLT に基づく計算プログラムを用いて求められた FRP 積層平板の振動数パラメータ λ と比減衰容量 η をそれぞれ示している。表から明らかになるように、厚さ比が大きい場合は両理論の結果には大きな差が生じている。しかし、厚さ比が非常に小さい場合には両者の結果はほぼ一致している。これより、解析法および計算プログラムの妥当性が確認できる。

表 5 は減衰シートを挟んだ FRP 積層平板(表中には DFRP と記す)と減衰シートを挟んでいない FRP 積層平板(表中には FRP と記す)に関する数値計算結果を示している。ここで減衰シートを挟んでいない積層板の積層形態には $[0/90/0/90]_{\text{SYM}}$ を考え、減衰シートを挟んだ積層板については減衰シートに記号「D」を用いて $[0/D/90/D/0/D/90/D]_{\text{SYM}}$ なる積層形態の場合を考えている。また、減衰シートを挟んだ積層板については、積層板全体の厚さ比 (H/a) を一定 $(=0.001)$ として、FRP ラミナの厚さに対する減衰シートの厚さ比 γ を変化させた場合の結果を示している。そして、DLT および CLT に基づく計算プログラムを用いて振動数パラメータ λ と比減衰容量 η を求めている。結果を見ると、DFRP において γ を小さくしていくと、いずれの結果も減衰シートを挟んでいない FRP 積層平板と同様の結果が両理論とも得られている。よって、これより両計算プログラムの妥当性を確認することができる。

表 6 は DLT および CLT に基づく計算プログラムを用いて求められた、減衰シートを挟んだ FRP 積層平板の振動数パラメータ λ を示している。ここでは、積層板全体の厚さ比を一定として、 γ を変化させた場合の結果を示している。表より、 γ が小さい場合には各振動モードにおける両理論の差は小さく、その差は 3 次振動において最大約 1% となっている。しかし、 γ が大きくなるにつれて理論による差は大きくなり、 $\gamma=0.5$ の時には最大 40% 強も差が生じている。

一方、表 7 は DLT および CLT に基づく計算プログラムを用いて減衰シートを挟んだ FRP 積層平板の比減衰容量 η について計算した結果である。この場合は明らかに振動数パラメータ λ の

Table 1 Material constants of FRP⁽¹⁾

E_L [GPa]	141	ν_{LT}	0.32
E_T [GPa]	7.05	η_L	0.0015
G_{LT} [GPa]	4.58	η_T	0.01
G_{TT} [GPa]	3.53	η_{LT}	0.016
ρ_F [kg/m ³]	1.6×10^3		

Table 2 Material constants of damping sheet⁽²⁾

E_D [MPa]	35	ν_D	0.45
G_D [MPa]	12.1	η_D	0.85
ρ_D [kg/m ³]	1.0×10^3		

Table 3 Frequency parameters of laminated plates
($b/a=2.0$, $[0/90/0/90]_{\text{SYM}}$)

H/a		Frequency parameters		
		1st	2nd	3rd
DLT	0.1	34.64	43.52	106.8
	0.01	38.52	48.38	148.5
	0.001	38.57	48.44	149.2
CLT		38.57	48.44	149.2

Table 4 Specific damping capacities of laminated plates
($b/a=2.0$, $[0/90/0/90]_{\text{SYM}}$)

H/a		Specific damping capacities [$\times 10^{-2}$]		
		1st	2nd	3rd
DLT	0.1	0.4971	0.5872	0.8553
	0.01	0.2415	0.3618	0.2003
	0.001	0.2383	0.3589	0.1872
CLT		0.2383	0.3589	0.1871

Table 5 Numerical results of DFRP and FRP by DLT and CLT
($b/a=2.0$, $H/a=0.001$, (1,1) mode)

γ	Frequency parameters		Specific damping capacities [$\times 10^{-2}$]	
	DLT	CLT	DLT	CLT
DFRP	0.01	38.52	38.53	0.2453
	0.001	38.56	38.56	0.2390
	0.0001	38.57	38.57	0.2384
FRP		38.57	38.57	0.2383

Table 6 Frequency parameters of symmetrically laminated plates with damping sheets
($b/a=2.0$, $H/a=0.01$, $[0/D/90/D/0/D/90/D]_{\text{SYM}}$)

γ	1st		2nd		3rd	
	DLT	CLT	DLT	CLT	DLT	CLT
0.5	32.76	36.17	41.24	46.00	98.74	139.5
0.1	36.79	38.13	46.24	48.03	128.2	147.4
0.05	37.60	38.36	47.24	48.24	137.0	148.3
0.01	38.33	38.53	48.15	48.41	146.0	149.0
0.005	38.42	38.55	48.27	48.42	147.2	149.1

Table 7 Specific damping capacities of symmetrically laminated plates with damping sheets
($b/a=2.0$, $H/a=0.01$, $[0/D/90/D/0/D/90/D]_{\text{SYM}}$)

γ	1st		2nd		3rd	
	DLT	CLT	DLT	CLT	DLT	CLT
0.5	0.1355	0.0078	0.1369	0.0255	0.3600	0.0032
0.1	0.0558	0.0035	0.0570	0.0080	0.1808	0.0021
0.05	0.0324	0.0029	0.0336	0.0058	0.1105	0.0020
0.01	0.0091	0.0025	0.0103	0.0040	0.0281	0.0019
0.005	0.0058	0.0024	0.0070	0.0038	0.0154	0.0019

場合とは異なり、 γ が小さい場合でも理論による差が大きくなった。また、 γ が大きい場合では両者の差はさらに増大している。

以上、本数値計算結果を検討する限り、解析が簡便な CLT に基づく数値計算でも、ある程度の精度を持って固有振動数を評価することは出来るものの、減衰特性評価においては採用する解析モデルによって結果に大きな差が生じてことが確認できる。これより、今後は固有振動数および比減衰容量の計算結果の比較だけでなく、層間の変形等を詳細に検討して、各解析モデルの適用範囲を検討する。

参考文献

- (1) 福田・邊, 複合材料の力学序説, (1993), 古今書院.
- (2) Ohta, Y and Narit, Y., ASME PVP-Vol.301, 1995, 175.
- (3) 道見・太田, 日本機械学会北海道学生会第 38 回卒業研究発表講演会講演論文集, (2009), 255.