606 三重相反境界要素法による分布荷重を受ける薄板の変形解析

Deformation Analysis of Thin Plate with Distributed Load by Triple-Reciprocity BEM

○ 落 合 芳 博 (近畿大)

Yoshihiro OCHIAI

^{*2} Department of Mechanical Engineering, Kinki University, 3-4-1 Kowakae, Higashi-Osaka, 577-8502 Japan**Key Words:** Boundary Element Method, Thin Plate, Computational Mechanics

1. 緒 言

従来の境界要素法により任意の分布荷重を受ける薄板の変形解析を行う場合、内部セルが必要であった。内部セルを使用する方法では、データが容易に作成できるという境界要素法の利点が損なわれる。多重相反法や二重相反法が提案されているが、任意の分布荷重を受ける薄板の変形解析に適用された事例はない。筆者は二次元熱弾塑性解析において、三重相反境界要素法によって、内部セルを用いずに解析が可能であることを示している。また、内部熱発生を伴う3次元定常熱応力問題も、三重相反境界要素法により、内部セルを用いずに解析できることを示している⁽¹⁻⁴⁾。本論文では、メッシュレスで任意の分布荷重を受ける薄板の変形解析を、三重相反境界要素法を用いて示す。

2. 理 論

点荷重 f_1^P 、線荷重 f_1^L は容易に、通常の境界要素法で処理することができる。薄板の変位を w 、分布荷重を $f_1(q)$ とすると、次の領域積分 Π がある。

$$\Pi = \frac{1}{D} \int f_1(q) T_2^*(p, q) d\Omega \quad (1)$$

ただし、薄板の縦弾性係数を E 、ポアソン比を ν 、板厚を h とすると、板の曲げ剛性 D は次式となる。

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2)$$

多重調和関数 T_f は次式で与えられる。

$$T_f^*(p, q) = \frac{r^{2f-2}}{2\pi[(2f-2)!!]^2} \left[\ln\left(\frac{1}{r}\right) + \text{sgn}(f-1) \sum_{e=1}^{f-1} \frac{1}{e} \right] \quad (3)$$

2.2 分布荷重の補間 点荷重 f_1^P 、線荷重 f_1^L は従来の境界要素法により、容易に処理することができる。分布荷重を $f^S(q)$ と置くと、荷重は次式となる。

$$f_1(q) = f_1^S(q) + f_1^P + f_1^L \quad (4)$$

分布荷重 $f^S(q)$ は次式で補間することができる⁽⁶⁾。

$$\nabla^2 f_1^S(q) = -f_2^S(q) \quad (5)$$

$$\nabla^2 f_2^S = -\sum_{m=1}^M f_{3(m)}^P(q) \quad (6)$$

式(5), (6)より、次式の境界積分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} Cf_1(p) = & \int [T_1^*(p, q) \frac{\partial f_1(q)}{\partial n} d\Gamma - \frac{\partial T_1^*(p, q)}{\partial n} f_1(q) d\Gamma \\ & - \int T_2^*(p, q) \frac{\partial f_2(q)}{\partial n} d\Gamma + \int \frac{\partial T_2^*(p, q)}{\partial n} f_2(q) d\Gamma \\ & - \sum_{m=1}^M f_{3(m)}^P(q) T_3^*(p, q) \end{aligned} \quad (7)$$

式(6)より次式の境界積分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} Cf_2(p) = & \int T_1^*(p, q) \frac{\partial f_2(q)}{\partial n} d\Gamma - \int \frac{\partial T_1^*(p, q)}{\partial n} f_2(q) d\Gamma \\ & + \sum_{m=1}^M f_{3(m)}^P(q) T_3^*(p, q) \end{aligned} \quad (8)$$

ただし、滑らかな境界上では $C=0.5$ 、領域内部では $C=1$ であり、式 Γ および Ω は境界および領域を示す。

連立積分方程式(7), (8)を解くことにより補間を行う。

2.6 三重相反法 多重調和関数 T_f^* は、次式を満足する。

$$\nabla^2 T_{f+1}^* = T_f^* \quad (9)$$

式(5), (6)を用いると、式(1)はグリーンの第2定理により次式のように領域積分のない形式に変形することができる。

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{D} \int T_3^*(p, q) \frac{\partial f_1^S(q)}{\partial n} d\Gamma - \frac{1}{D} \int \frac{\partial T_3^*(p, q)}{\partial n} f_1^S(q) d\Gamma \\ & - \frac{1}{D} \int T_4^*(p, q) \frac{\partial f_2^S(q)}{\partial n} d\Gamma + \frac{1}{D} \int \frac{\partial T_4^*(p, q)}{\partial n} f_2^S(q) d\Gamma \\ & - \frac{1}{D} \sum_{m=1}^M f_{3(m)}^P(q) T_4^*(p, q) \end{aligned} \quad (10)$$

同様に、内点のモーメントや勾配に関する領域積分も境界積分の形式に変換することができる。

3. 解 析 例

全周が単純支持された正方形板に次式の分布荷重が作用している場合の変位分布を求めた。

$$f_1(x, y) = q_0 \sin\left(\frac{\pi x}{A}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{B}\right) \quad (11)$$

図1に示すように長さを $A=10\text{mm}$ とし、板厚 $h=0.1\text{mm}$ とした。また、 $q_0=0.1\text{N/mm}^2$ とした。縦弾性係数 $E=210\text{GPa}$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ とした。図1に示すように要素数200、内点数を81として計算した。本手法での計算結果と厳密解との比較を図2,3,4に示す。

図5に示す全周が固定支持された円板に、次式で示される

分布荷重が作用している場合の変位分布を求めた.

$$f_1(r) = q_0 \left(\frac{A^2 - r^2}{A^2} \right) \quad (12)$$

図 5 に示すように直径を $R=50\text{mm}$ とし, 板厚 $h=1\text{mm}$, $q_0=1\text{N/mm}^2$ とした. 縦弾性係数 $E=210\text{GPa}$, ポアソン比 $\nu=0.3$ とした. 図 5 に示すように要素数 72, 内点数を 131 とした. 本手法での計算結果と厳密解との比較を図 6,7,8 に示す.

Fig.1 Boundary elements and internal points

Fig.2 Displacement of square plate with sin load

Fig.3 Gradient of square plate with sin load

Fig.4 Moment of square plate with sin load

Fig.5 Clamped circular plate

Fig.6 Displacement of clamped circular plate

Fig.7 Gradient of clamped circular plate

Fig.8 Moment of clamped circular plate

参考文献

- (1) Ochiai Y., Meshless Thermo-Elastoplastic Analysis by Triple-Reciprocity BEM, Transaction of the Japan Society of Mechanical Engineer, Vol.74, No.743 (2008), pp.939-945.
- (2) Ochiai Y., Three-Dimensional Thermal Stress Analysis by Triple-Reciprocity Boundary Element Method, International Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol.63, No.12, pp.1741-1756, (2005).
- (3) Ochiai, Y. and Kobayashi, T., Initial Stress Formulation for Elastoplastic Analysis by Improved Multiple-Reciprocity Boundary Element Method, Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 23, pp. 167-173, 1999.
- (4) Ochiai Y. and Kobayashi T., Initial Strain formulation without Internal Cells for Elastoplastic Analysis by Triple-Reciprocity BEM, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.50, (2001), pp.1879-1891.