404 中間変数を用いた流速圧力分離解法のシェル構造-流体一体型解析への適用

Application of decoupled method using intermediate variable to monolithic analysis of shell-fluid interaction

〇正 石原 大輔(九工大院) 岡村 尚樹(九工大院) 正 堀江 知義(九工大院) 正 二保 知也(九工大院)

Daisuke ISHIHARA, Kyushu Institute of Technology

Naoki OKAMURA, Tomoyoshi HORIE and Tomoya NIHO

Key words: Fluid-Structure Interaction, Decoupled Method, Monolithic Method, Shell Structure, Incompressible Viscous Fluid

1. 緒言

流体構造連成解析手法は分離型解法と一体型解法に大別され、それぞれ一長一短ある。分離型解法は既存の優れた解析コードを有効利用でき、また強連成問題への適用^{(1),(2)}が近年急速に進んでいる。一方、一体型解法は強連成問題への適用例が多い。ゆえにその欠点の改善を進め、利用者が2つの解法の長所短所を理解した上で、連成問題に応じてそれらを使い分けられる体制が望ましい。一体型解法の欠点のひとつとして、連成方程式の係数行列が悪条件と成り易いことが挙げられる。ゆえにその改善手法^{(3),(4)}が提案されている。本研究では、中間変数を用いた流速圧力分離解法に基づく一体型解法^{(5),(6)}がシェル構造-流体一体型解析における上述の欠点に対して有効かどうかを検討するため、その適用と精度検証を行う。

2. 流速圧力分離型解法の適用とその増分型定式化

本研究では、構造大変形を扱うために、中間変数を用いた流速圧力分離型解法の一体型解法への適用^{(5),(6)}を増分型で定式化する。

非圧縮性粘性流体と弾性体の連成現象における有限要素離散化された運動方程式を次式のように記述する。

$$\mathbf{q}_i^s = \mathbf{g}_i^s, \mathbf{q}_c^s + \mathbf{q}_\tau^s = \mathbf{g}_c^s, \mathbf{q}_i^f = \mathbf{g}_i^f \quad (1a, b, c)$$

ここで $\mathbf{q}$ は運動方程式の左辺の全ての項を含む等価内力ベクトル、 $\mathbf{g}$ は外力ベクトル、ベクトルの右上付添え字 s, f はそれぞれ構造、流体の諸量、ベクトルの右下付添え字 i, c はそれぞれ構造流体の非連成、連成の自由度であることを表す。時刻 $t+\Delta t$ における反復計算 k を用いて、式(1)を満たす未知の加速度 ${}^{t+\Delta t}\mathbf{a}$ 、速度 ${}^{t+\Delta t}\mathbf{v}$ 、変位 ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}$ を求める。反復 $k-1$ から k までの加速度、速度、変位、圧力の増分 $\Delta\mathbf{a}$ 、 $\Delta\mathbf{v}$ 、 $\Delta\mathbf{u}$ 、 $\Delta\mathbf{p}$ を用いて、式(1)を線形化すると、

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{M}^* \Delta\mathbf{a} - \mathbf{G} \Delta\mathbf{p} = \Delta\mathbf{g} \quad (2)$$

を得る。式(2)の係数行列 $\mathbf{M}^*$ 、 $\mathbf{G}$ と残差ベクトル $\Delta\mathbf{g}$ は

$$\mathbf{M}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{L} \mathbf{M}_{ii}^s & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L} \mathbf{M}_{ii}^f + \mathbf{L} \mathbf{M}_{ci}^f & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L} \mathbf{M}_{ii}^f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta \Delta t^2 \mathbf{K}_{ii}^s & \beta \Delta t^2 \mathbf{K}_{ic}^s & \mathbf{0} \\ \beta \Delta t^2 \mathbf{K}_{ci}^s & \beta \Delta t^2 \mathbf{K}_{cc}^s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{G} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{G}_c \quad \mathbf{G}_i]$ 、 $\Delta\mathbf{g} = [\Delta\mathbf{g}_i^s, \Delta\mathbf{g}_c^s, \Delta\mathbf{g}_i^f] = [\mathbf{g}_i^s - \mathbf{q}_i^s, \mathbf{g}_c^s - \mathbf{q}_c^s, \mathbf{g}_i^f - \mathbf{q}_i^f]$ である。ここで $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{K}$ 、 $\mathbf{G}$ はそれぞれ質量、接線剛性、圧力勾配の行列、 β はNewmark法の制御パラメータ、添え字 L, τ はそれぞれ

行列の対角集中心化、転置を表す。式(2)の導出において、質量行列の対角集中心化、流体の移流・拡散項の既知の流体速度 ${}^{t+\Delta t}_{k-1}\mathbf{v}^f$ による評価、Newmark法に基づく変位・速度・加速度増分間の関係式 $\Delta\mathbf{v} = \gamma \Delta t \Delta\mathbf{a}$ 、 $\Delta\mathbf{u} = \beta \Delta t^2 \Delta\mathbf{a}$ を適用している。次に既知の圧力 ${}^{t+\Delta t}_{k-1}\mathbf{p}$ に対して、式(2)を満たす加速度、速度、変位の中間変数 ${}^{t+\Delta t}_k\mathbf{a}^*$ 、 ${}^{t+\Delta t}_k\mathbf{v}^*$ 、 ${}^{t+\Delta t}_k\mathbf{u}^*$ を考え、同様の手順で式(1)を線形化すると、次式を得る。

$${}^{t+\Delta t}_{k-1}\mathbf{M}^* \Delta\mathbf{a} = \Delta\mathbf{g} \quad (3)$$

ここで*付きの増分 $\Delta\mathbf{a}^*$ は中間変数の増分($\Delta\mathbf{a}^* = {}^{t+\Delta t}_k\mathbf{a}^* - {}^{t+\Delta t}_{k-1}\mathbf{a}$)であることを示す。式(2)、(3)の辺々を引くことで次式を得る。

$${}^{t+\Delta t}_{k-1}\mathbf{M}^* ({}^{t+\Delta t}_k\mathbf{v}^* - {}^{t+\Delta t}_{k-1}\mathbf{v}) - \gamma \Delta t \mathbf{G} \Delta\mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (4)$$

但し、 $\Delta\mathbf{a} - \Delta\mathbf{a}^* = ({}^{t+\Delta t}_k\mathbf{v}^{(k)} - {}^{t+\Delta t}_k\mathbf{v}^*)/\gamma \Delta t$ の関係をを用いた。式(4)の両辺に左から $\mathbf{G}_L \mathbf{M}^{-1}$ を掛け、速度とその中間変数の差が反復計算過程で0に漸近することを利用すると、最終的に次式を得る。

$$\gamma \Delta t \mathbf{G}_L \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G} \Delta\mathbf{p} = -\mathbf{G}^t {}^{t+\Delta t}_k\mathbf{v} - \mathbf{G}^t {}^{t+\Delta t}_k\mathbf{v}^* \quad (5)$$

上式の右辺第1項 $=\mathbf{0}$ は非圧縮性条件と等価なので、非圧縮性条件を解く代わりに、次式の圧力ポアソン方程式を解くことができる。

$$\gamma \Delta t \mathbf{G}_L \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G} \Delta\mathbf{p} = -\mathbf{G}^t {}^{t+\Delta t}_k\mathbf{v}^* \quad (6)$$

以上をまとめると、本解法による解析の流れは次のようになる。
Step1: 式(3)を解いて、 $\Delta\mathbf{a}^*$ を得て、それから ${}^{t+\Delta t}_k\mathbf{v}^*$ を得る、
Step2: 式(6)を解いて、 $\Delta\mathbf{p}$ を得る、
Step3: 最後に、式(2)を解いて、 $\Delta\mathbf{a}$ を得る。

通常の一体型解法では、連成方程式(運動方程式+非圧縮性条件)を解くのにに対し、本解法では連成方程式を分離して、運動方程式と非圧縮性条件に対応する圧力ポアソン方程式を解く。ゆえに通常の一体型解法に比べ、本解法の方が反復法ソルバーを利用し易く、大規模解析に適している。本研究ではCG法を用い、流体領域のみ領域分割に基づく並列化を行った。

構造がシェルの場合、その厚さは面内の大きさに比べ、かなり小さいので、周囲の流体メッシュをシェル構造の幾何形状に合わせると、必要以上の節点数・要素数となる可能性がある。そこでシェル

構造の中立面上の同じ位置に流体節点を2重に配置し、1つは表、もう1つは裏の面に対応させる。シェル構造の中立面上で構造節点と流体節点の位置が一致すると仮定して、次の補間関係式を構造と流体の間の連続・平衡条件に、構造節点毎に導入する。

$$\mathbf{T}_c \mathbf{v}_c^s = \mathbf{T}_c [\mathbf{v}_{c0}^s, \mathbf{v}_{c1}^s], \mathbf{q}_c^s + \mathbf{T}_{c\tau} [\mathbf{q}_{c0}^s, \mathbf{q}_{c1}^s] = \mathbf{g}_c^s, \mathbf{T}_c = [1 \quad 1] \cdots \quad (7)$$

ここで補間行列 $\mathbf{T}$ と速度・等価内力ベクトルの積の演算において、形式的にベクトルをスカラーのように扱っている。また右下添え字 c は構造節点を表し、それに対する流体節点を $c0, c1$ としている。

3. 流体中で大移動・大変形する翼の解析と実験との比較

3.1 問題設定

本解法を用いて、流体中で羽ばたく翼の解析を行う。図1に問題設定の概要を示す。翼(翼長 $L_w = 0.225$ m, 翼弦長 $c = 0.043$ m, 質量密度 $\rho^s = 1.0 \times 10^3$ kg/m³)がシリコン油(質量密度 $\rho^f = 9.6 \times 10^2$ kg/m³, 粘性係数 $\mu = 0.048$ kg/(cm s))中で、大きくストローク運動する(ストローク角 $\phi = 123$ deg., ストローク周波数 $f_\phi = 0.521$ Hz)。図1の翼の柔軟部分(図1の翼の白い部分, 翼弦方向長さ $c_\phi = 1.0 \times 10^{-2}$ m, 板厚 $t_\phi = 3.0 \times 10^{-4}$ m, ヤング率 $E_\phi = 6.56 \times 10^9$ Pa)が大変形し、高い迎角(たわみ角の最大は約50 deg.)が発生する。翼の柔軟部分以外は剛体板として振舞うように、ヤング率と板厚を設定している。詳細は文献(9)に譲るが、以上の問題設定は、ハエ目の昆虫(*Tipula obsoleta*, ガガンボの1種)の羽ばたき飛行(無次元数: ストローハル数 $St = 0.0726$, レイノルズ数 $Re = 254$)を、流体構造連成現象の力学的相似則を用いて、翼長約1 cmから約23 cmにスケール拡大し、実験的にその力学量を測定できるようにしたものである。但し、本研究では、メッシュ作成を容易にするため、翼を長方形としている。翼のメッシュはMITC シェル要素⁽⁷⁾を用いて節点数121・要素数100, 流体領域のメッシュはP1P1要素⁽⁸⁾を用いて節点数46,911・要素数254,352とした。流体解析の安定化のためにSUPG/PSPG法を用いる。時間刻みはストローク周期 T_ϕ の1/5000とした。ストローク角速度の時刻歴を図2のように与える。同図の加速減速時間 t_a を $T_\phi/10, T_\phi/8, T_\phi/6, T_\phi/4$ とする。

3.2 解析結果と考察

$t_a = T_\phi/8$ とした場合の時刻6.25 cycleにおける翼の変形とある翼弦が運動する円筒面上の流速ベクトル場を図3に示す。また解析と実験により得られた翼への揚力の時刻歴を図4に示す。図3に示すように、昆虫羽ばたき飛行に特徴的な前縁渦の形成が捉えられている。また図4に示すように、 t_a の増加に伴う揚力時刻歴の特徴の変化を本解析結果が良く捉えており、定量的にも実験結果と良く一致していることが判る。

4. 結言

本研究では、中間変数を用いた流速圧力分離型解法をシェル構造・流体連成の一体型解析に適用した。適用においては、構造大変形を取り扱うために増分型で定式化した。本解法を流体中で大きくストローク運動し、大変形する羽ばたき翼の解析に適用したところ、実験結果と良く一致する結果を得た。今後は大規模強連成解析への有効性を検討する。

Fig. 1 Schematic view of our model wing flight.

Fig. 2 Time history of the angular velocity of stroke motion.

Fig. 3 The model wing deformation and the fluid velocity field around the model wing.

Fig. 4 Time histories of lift forces acting on the model wing. The black lines indicate the numerical results, while the grey lines indicate the experimental results.

参考文献

- (1) Yamada, T. and Yoshimura, S., *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 24, 51-60, 2008.
- (2) Minami, S. and Yoshimura, S., *Journal of Computational Science and Technology*, 3, 396-407, 2009.
- (3) Ishihara, D. and Yoshimura, S., *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 64, 167-203, 2005.
- (4) Washio, T., Hisada, T., Watanabe, H. and Tezduyar, T.E., *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194, 4027-4047, 2005.
- (5) Matsumoto, J. and Kawahara, M., *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 15, 33-45, 2001.
- (6) 松本純一, 鈴木健, 手塚明, 計算工学講演会論文集, 8, 609-612, 2003.
- (7) Noguchi, H. and Hisada, T., *Computers & Structures*, 47, 699-710, 1993.
- (8) Tezduyar, T.E. et al., *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 95, 221-242, 1992.
- (9) Ishihara, D., Yamashita, Y., Horie, T., Yoshida, S. and Niho, T., *Journal of Experimental Biology*, 212, 3882-3891, 2009.