系の流体構造連成フラッタ現象の数値解析及び理論解析

Numerical and mathematical analyses of a FSI flutter of flexible filaments

○正 澤田 有弘 ((独) 産業技術総合研究所 先進製造プロセス研究部門)

Tomohiro SAWADA, National Institute of Advanced Industrial Science and Technology (AIST), 1-2-1 Namiki, Tsukuba, Ibaraki

Key Words: Fluid-structure interactions (FSI), Coupled flutter, Numerical simulation, Mathematical analysis

Abstract

This paper presents a fluid-structure interaction (FSI) modeling and numerical simulations of coupled flutter of flexible filaments in a flow. Experimentally-observed "stretched-straight state" and "flapping state" of a single filament are numerically and mathematically analyzed to find analogies in FSI dynamics with experimentally-observed "in-phase" and "out-of-phase" flapping modes of two parallel filaments. Our numerical results show that the coupled flapping of parallel filaments is modeled as a single filament with different mass.

1. 緒言

流れの中に設置された物体群には、流れを介した複雑な相互作用挙動が発生する。柔軟な物体に関する実験として、Zhang ら^(1,6,7)は細い糸を一樣な流れの中に設置した際の糸の安定状態に関する実験を行い、一本の場合には長さに応じてはたらく場合とはためかない場合に、平行な二本の場合には距離に応じて同位相もしくは逆位相ではたらく場合に分かれることを示した。図1に、同位相と逆位相のはためきの模式図を示す。この他にも、Eloy ら^(4,5)はゴム製の薄板に生じる連成振動を、四枚まで報告している。Watanabe ら^(2,3)も一枚の紙に発生するはためきを、実験及び理論解析の双方から考察している。計算力学に基づく非線形シミュレーションも、Zhu ら^(8,9)、Farnell ら^(10,11)、Sawada ら^(12,13)、Huang ら⁽¹⁴⁾により報告されている。本研究では、Zhang らの実験⁽¹⁾で観測された平行な二本の場合の連成振動に着目し、計算力学に基づく非線形シミュレーション及び線形理論に基づくシミュレーション結果の分析を行うことで、その機序の考察を行う。

Fig.1 Two flapping modes of two parallel filaments: (a) in-phase mode, and (b) out-of-phase mode.

2. 流れと糸の非線形計算モデル

本研究では流れと糸の連成挙動を、連続体力学に基づき記述する。流れは Newton 流体と非圧縮性の仮定の下、次式で与えられる Navier-Stokes 方程式に支配されるものとする。

$$\rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho_f \mathbf{g}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1), (2)$$

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}, \quad (3)$$

ここで、 ρ_f は質量密度、 $\mathbf{v}$ は流速、 $\mathbf{T}$ 、 $\mathbf{g}$ は Cauchy 応力と重力加速度、 p は圧力、 μ は粘性係数、 $\mathbf{I}$ 、 $\mathbf{D}$ は単位テンソルと変形速度テンソルとする。糸の運動は、構成則を Saint-Venant 弾性体とした以下の Cauchy の運動法則で記述する。

$$\rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \nabla \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{F})^T + \rho_s \mathbf{g}, \quad (4)$$

$$\mathbf{S} = \lambda_s (\text{tr} \mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu_s \mathbf{E}, \quad (5)$$

ここで、 ρ_s は質量密度、 $\mathbf{u}$ は変位、 $\mathbf{S}$ 、 $\mathbf{F}$ は第二 Piola-Kirchhoff 応力と変形勾配テンソル、 μ_s 、 λ_s は Lamé の弾性係数、 $\mathbf{E}$ は Green-Lagrange 歪とする。

流体と糸の境界においては、次式で示される速度の一致条件と表面力の平衡条件が満たされるものとする。

$$\mathbf{v} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{t}_{sf} + \mathbf{t}_{fs} = \mathbf{0}, \quad (6), (7)$$

ここで $\mathbf{t}_{sf}$ は物体から流体に作用する力、 $\mathbf{t}_{fs}$ は流体から物体に作用する力である。

3. 有限要素法に基づく連成解析手法

2 節に記述した流体構造連成方程式の時間方向及び空間方向の離散化は、文献^(21,22)に示される非線形有限要素法に基づく流体構造連成計算手法によって行う。当該手法では、図2に示されるように流体の Euler メッシュと構造の Lagrange メッシュを用意し、その境界にて式(6)を拘束条件とした流体構造連立の非線形有限要素方程式を導く。式(6)の拘束条件の組み込みには、式(7)に対応する流体と構造の動的な平衡力を未知変数とした Lagrange 未定乗数法を適用する。連成境界上では境界適合メッシュと同等の境界離散化モデルと精度を与えるため、物体をまたぐ流体要素に X-FEM⁽¹⁵⁻¹⁷⁾に基づく流速勾配と圧力の不連続化内挿⁽¹⁸⁻²²⁾を適用する。得られた連立方程式の時間積分は、Newmark 法に基づき陰的に実施し、流体部と構造部と連成部を一括して解く。

Fig.2 Fluid and structure meshes for a coupled simulation.

4. 二本の糸の連成振動に対する数値実験

本研究では Zhang らが行った石鹸膜流れの中の糸の応答実験⁽¹⁾を基に、図3に示される流路中に二本の糸を上端固定で平行に設置した際の数値実験を行う。境界条件は、流路の上

面を流速 220 cm/s の基本境界, 下面を外部指定応力零の自然境界, 側面を滑り境界とする. 流体は質量密度 1000 kg/m³, 粘性係数 0.12 Pa s とし, 流路の厚みを 3 μm とする. 糸は質量密度 1132 kg/m³, ヤング率 4 MPa, 厚み 0.130 mm, 幅 0.136 mm のシェル要素でモデリングする. 長さは 3 cm とする.

Fig.3 Numerical channel of two parallel filaments in a flow.

上記の条件のもと, 二本の糸の距離 d を糸の長さ L に対する比で 0.05 から 0.60 まで広げていく数値実験を行った. 図 4 に, $d/L = 0.05, 0.15, 0.25$ の時に二本の糸が連成振動している際のある二つの時刻の渦度の等高線を示す. 本図に示されるように, 本実験では初期外乱の有無に係わらず, $d/L < 0.15$ で同位相 (図 4a), $d/L > 0.15$ で逆位相 (図 4d), 分岐長 $d/L = 0.15$ では初期外乱有りの場合は同位相 (図 4b), 無しの場合は逆位相 (図 4c) のはためきとなった. 一本の場合においては, 初期外乱の有無にははためきの発生が依存する bistability が実験・数値解析の双方で確認されている^(1,2,8,12). 二本の場合では更に, 同位相と逆位相とで bistability が発生することが, 本研究で明らかとなった.

次に二本に対する連成振動の振幅と周波数を, d/L を横軸に図 5 に示す. Zhang らの実験⁽¹⁾では大よそ $d/L = 0.21 \pm 0.04$ で分岐が確認され, 同位相から逆位相への遷移で周波数が 35% 程度上昇すると報告されている. 本解析においても約 40% の不連続な上昇が確認された.

Fig.4 Flapping displacement and vorticity of parallel filaments.

Fig.5 Amplitude and frequency of parallel filaments vs distance.

4. 一本の糸のはためきとの相似性の分析

二本の糸のはためきの位相遷移の分析のため, ここで, 二本の同位相のはためきは等価な一本のはためきに置換可能なものではとの類推のもと, 一本の場合の糸の質量密度を五倍まで変更する数値実験を行った. 図 6 に, $\alpha = 0.5, 1.0, 2.0, 3.0$ の時の渦度を, 図 7 に糸の質量倍率 α に対するはためきの振幅と周波数の変化を示す. 大よそ $\alpha < 0.7$ の条件下では振動が発生せず, stretched-straight state となった.

Fig.6 Flapping displacement and vorticity of a single filament.

Fig.7 Amplitude and frequency of a single filament vs density.

ここで, 次式で与えられる固定端-自由端支持の Bernoulli-Euler 梁に対する固有周波数 f_i の線形理論解に, 流体からの付加質量 m_f と付加剛性 K_f を加えた連成振動の評価モデルを導入する.

$$2\pi f_i = \left(\frac{k_i}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI + K_f}{\alpha m_s + m_f}} \quad (i = 1, 2, \dots), \quad (8)$$

ここで、 m_s は糸の断面積当たりの質量、 EI は曲げ剛性で、今回の場合は各々 2.0×10^{-4} g/cm, 0.01 Pa cm⁴となる。 k_i は振動の固有値で、3次までの近似値は1.875, 4.694, 7.855となる。まず式(8)を基に一本の場合のはためきの固有値、付加質量、付加剛性の同定を行うと、 α の値によらず固有値は二次の k_2 、付加質量、付加剛性は次式で与えられる結果となった。

$$m_f = 2.7 \times 10^{-4} = \rho_f t_f w_f, \quad (9)$$

$$K_f = 1.05 = \rho_f t_f w_f^3, \quad (10)$$

$$w_f = 0.75 = \frac{L}{4} \cong \frac{2L}{k_3}, \quad (11)$$

ここで t_f は流路の厚みであり、仮想的な付加流体の幅 w_f を導入すると、 m_f 、 K_f がそれぞれ仮想的な流体の断面積 $t_f w_f$ と断面二次モーメント $t_f w_f^3$ で記述されることが明らかとなった。本発見は、他の文献では報告されていない。そして一本の場合の振動の発生条件は、次式で与えられる結果となり、これは、二次の連成振動の波動伝播速度が境界条件に設定した流速 V を超える状況下では、はためきが起こり得ないものと解釈される。

$$2\pi f_2 < \frac{k_2 V}{L}, \quad (9)$$

次に二本の場合との比較を行うと、一本の $\alpha = 2$ の周波数は32.4 Hz、振幅は0.34Lであり、二本の糸が同位相ではためている際の約33 Hzの周波数と約0.35Lの連成振幅に近い値となる。これらにより、二本の同位相のはためきは、質量密度二倍の一本のはためきで近似可能、厳密には、二本の距離 $d/L \rightarrow 0$ の漸近解が一本の $\alpha = 2$ と考えられる。一方で、逆位相のはためきは $\alpha = 2$ の一本では近似曲線が得られず、 $\alpha = 1$ のまま $d/L \rightarrow \infty$ で流体からの付加質量が m_f となることで説明される。ただし $0.15 < d/L < 0.30$ の範囲は、二本の糸で接触が生じ、本影響は考慮されないため除外される。

また分岐そのものは、図5と図6の振幅のプロットから分析すると、二本の糸が同位相ではためている際の一本あたりの振幅が、通常の一の本のはためきの振幅値とほぼ等しくなった時に発生しているものと考えられる。これと共に、連成振動の質量の飛び移りが起こり、特に二本の糸が同調した質量分の $2m_s$ が突如分断され一本分の質量 m_s に戻る点が、周波数並びに振幅に大きな変化をもたらしているものと考えられる。

5. 結言

本研究では、Zhang らの実験⁽¹⁾で報告された一様な流れの中に設置された平行な二本の糸が距離に応じて同位相もしくは逆位相ではためく現象に着目し、流体構造連成力学に基づく数値シミュレーション実験を行った。続いて、数値解析に基づき同定した流体からの付加質量と付加剛性の値の下、梁の固有振動モードに基づく線形理論解析を行った。

その結果、同位相の場合は質量密度二倍の一本の糸のはためきとして動的な安定状態の近似が行え、逆位相の場合は、流体からの付加質量が距離に応じて一本の場合へ漸近していく状況で近似できることを示した。同位相と逆位相の分岐距離では bistability が発生することも示した。分岐そのものは、二本の糸が同位相ではためている際の一本あたりの振幅が、通常の一の本のはためきの振幅値とほぼ等しくなった時に発生しているものと考えられた。

参考文献

- 1) Zhang J, Childress S, Libchaber A, Shelley M, Flexible filaments in a flowing soap film as a model for one--dimensional flags in a two-dimensional wind, *Nature* (London), 408, 835-839, 2000.
- 2) Watanabe Y, Suzuki S, Sugihara M, Sueoka Y, An experimental study of paper flutter, *J Fluids Struct*, 16, 529-542, 2002.
- 3) Watanabe Y, Isogai K, Suzuki S, Sugihara M, An theoretical study of paper flutter, *J Fluids Struct*, 16, 543-560, 2002.
- 4) Eloy C, Souilliez C, Schouveiler L, Flutter of a rectangular plate, *J Fluids Struct*, 23, 904-919, 2007.
- 5) Schouveiler L, Eloy C, Coupled flutter of parallel plates, *Phys Fluids*, 21, 081703(4), 2009.
- 6) Alben S, Shelley MJ, Flapping states of a flag in an inviscid fluid: bistability and the transition to chaos, *Phys Rev Lett*, 100, 074301(4), 2008.
- 7) Shelley MJ, Zhang J, Flapping and bending bodies interacting with fluid flows, *Annu Rev Fluid Mech*, 43, 449-465, 2011.
- 8) Zhu L, Peskin CS, Simulation of a flapping flexible filament in a flowing soap film by the immersed boundary method, *J Comput Phys*, 179, 452-468, 2002.
- 9) Zhu L, Peskin CS, Interaction of two flapping filaments in a flowing soap film, *Phys Fluids*, 15, 1954-1960, 2003.
- 10) Farnell DJJ, David T, Barton DC, Numerical simulations of a filament in a flowing soap film, *Int J Numer Meth Fluids*, 44, 313-330, 2004.
- 11) Farnell DJJ, David T, Barton DC, Coupled states of flapping flags, *J Fluids Struct*, 19, 29-36, 2004.
- 12) 澤田有弘, 久田俊明, ALE 有限要素法による二次元の旗のはためき問題の流体・構造連成解析, *Trans JSME A*, 71(701), 1-8, 2005.
- 13) Sawada T, Hisada T, Fluid-structure interaction analysis of the two-dimensional flag-in-wind problem by an interface-tracking ALE finite element method, *Comput Fluids*, 36, 136-146, 2007.
- 14) Huang WX, Shin SJ, Sung HJ, Simulation of flexible filaments in a uniform flow by the immersed boundary method, *J Comput Phys*, 226, 2206-2228, 2007.
- 15) Moës N, Dolbow J, Belytschko T, A finite element method for crack growth without remeshing, *Int J Numer Meth Engng*, 46, 131-150, 1999.
- 16) Belytschko T, Moës N, Usui S, Parimi C, Arbitrary discontinuities in finite elements, *Int J Numer Meth Engng*, 50, 993-1013, 2001.
- 17) Sukumar N, Chopp DL, Moës N, Belytschko T, Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method, *Comput Methods Appl Mech Engng*, 190, 6183-6200, 2001.
- 18) Legay A, Chessa J, Belytschko T, An Eulerian-Lagrangian method for fluid-structure interaction based on level sets, *Comput Methods Appl Mech Engng*, 195, 2070-2087, 2006.
- 19) Zilian A, Legay A, The enriched space-time finite element method (EST) for simultaneous solution of fluid-structure interaction, *Int J Numer Meth Engng*, 75, 305-334, 2008.
- 20) Gerstenberger A, Wall WA, An extended finite element method/Lagrange multiplier based approach for fluid-structure interaction, *Comput Methods Appl Mech Engng*, 197, 1699-1714, 2008.
- 21) Sawada T, Tezuka A, High-order Gaussian quadrature in X-FEM with Lagrange-multiplier for fluid-structure coupling, *Int J Numer Meth Fluids*, 64, 1219-1239, 2010.
- 22) Sawada T, Tezuka A, LLM and X-FEM based interface modeling of fluid-thin structure interactions on a non-interface-fitted mesh, *Comput Mech*, 48, 319-332, 2011.