1 階・2 階滑り境界条件を用いた中程度希薄流の壁面滑り効果の数値的考察

Numerical Investigations of Wall Slip Effects on Rarefied Gas Flows
by First and Second-order Slip Boundaries

〇正 尾形 陽一 (広大工)

Youichi Ogata, Hiroshima University, 1-4-1, Kagamiyama, Higashi-Hiroshima-shi, Hiroshima

The present paper introduces a numerical method to a simple but general form of a higher-order slip boundary condition on a simple planar wall. The present numerical method for the continuum model in combination with first and second-order velocity slip boundary conditions is applied to two-dimensional rid-driven cavity flow. Rarefaction effects by slip conditions can be clearly seen in stream lines and velocity distributions depending on slip models.

Key Words: CIP, Navier-Stokes equations, Slip boundary, Rarefied Gas, Micro-fluids

1. はじめに

クヌッセン数 $Kn \equiv \lambda/L$ (λ : 平均自由行程, L : 代表長さ) が大きい流れはボルツマン方程式を解く必要があるが, マイクロポンプ等の MEMS (Micro-Electro-Mechanical-Systems) 内の流れの様な $Kn < O(10^{-1})$ の連続流近似が可能な中程度の希薄流では Navier-Stokes (N-S) 方程式に滑り境界条件の有用性が示されている. 既往研究¹⁾で Maxwell 型 1 階滑り条件を Cavity 流れに適用したが, 本論では 2 階滑り^{2,3)}へ拡張を行い, 計算方法の導入及び 1 階・2 階滑り条件が流体場に及ぼす効果を 2 次元 Cavity 流れ⁴⁾を用いて検証を行う.

2. 解析手法と滑り境界条件

2-1 基礎方程式

代表長さ・速度・時間・圧力をそれぞれ $h_0, U_0, t_0 = h_0/U_0$, $p_0 = \rho_0 U_0^2$ と置くとマッハ数 Ma , クヌッセン数 Kn , レイノルズ数 Re は下記の様に表せる.

$$\frac{1}{Ma} = \frac{C_0}{U_0}, \quad Kn \equiv \frac{\lambda_0}{h_0}, \quad \frac{1}{Re} = \frac{\mu_0}{\rho_0 h_0 U_0} = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \frac{Kn}{Ma}, \quad (1)$$

ここで剛体球モデル・BGK モデルではそれぞれ $\alpha = 5\pi/16$, $\alpha = \pi/4$ である. 本論では小さい Ma を仮定し, 非圧縮性 N-S 方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (2)$$

を基礎方程式として用い, CIP-CUP 法⁵⁾で解く. 次節で速度滑り境界条件の定式及び計算方法の概略を説明する.

2-2 滑り境界条件

N-S 方程式で用いられる平板上での, 速度に対する一般的な 2 階滑り境界条件²⁾は次の式が用いられる.

$$\Delta U_{slip} = u_{x=x_w} - u_w = A_1 Kn \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_{x=x_w} - A_2 Kn^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right)_{x=x_w}, \quad (3)$$

ここで $\partial/\partial n$, $\partial^2/\partial n^2$ はそれぞれ壁面に垂直な法線方向の 1 階, 2 階微分, u_w は壁面速度 (静止壁では $u_w = 0$), (A_1, A_2) はモデルに依存する定数係数である.

例えば図 1 の様な 2 次元の壁面 $y=0$ (格子点 $j=0$) 上の $x=x_i$ (格子点 i) において式(3)を組み込む際には, まず平板壁面上の薄い層内での速度 u を次の 2 次関数

$$u_0(x=x_i, y) = a_0 y^2 + b_0 y + c_0, \quad (4)$$

で近似する. y 方向の条件及び点 $(x, y) = (x_i, 0)$ で $\partial u/\partial y = b_0$, $\partial^2 u/\partial y^2 = 2a_0$ であることから式(3)より

$$u_{i,2} = a_0 (\Delta y_1 + \Delta y_2)^2 + b_0 (\Delta y_1 + \Delta y_2) + c_0,$$

$$u_{i,1} = a_0 \Delta y_1^2 + b_0 \Delta y_1 + c_0, \quad (5)$$

$$u_{i,0} = c_0 = u_w + A_1 Kn \cdot b_0 - A_2 Kn^2 \cdot 2a_0,$$

が得られ, 壁面上の滑り速度 $c_0 (= u_{i,0})$ が一意に求まる. また, $A_2 = 0$ とすると 1 階滑り条件に帰着される.

Fig. 1 Grid points for a tangential velocity component on and near a wall in xy -plane.

一方, 壁面の接線方向に速度変化が生じる場合は接線方向の 2 階微分も考慮する必要があるが, 例えば Deissler³⁾は

$$\Delta U_{slip} = A_1 Kn \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_{x=x_w} - A_2 Kn^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial l^2} \right]_{x=x_w}, \quad (6)$$

の形を提案した. ここで l は平面上の接線方向である. $y=0$ が壁面の場合, 両隣の格子点 $i \pm 1$ もそれぞれ法線方向に 2 次関数近似を行う.

$$u_{\pm 1}(x=x_{i \pm 1}, y) = a_{\pm 1} y^2 + b_{\pm 1} y + c_{\pm 1}. \quad (7)$$

また, $x=x_i$ を原点とした両隣の 2 点も用いて接線方向も次の様に 2 次関数で近似する.

$$u(x, y=0) = dX^2 + eX + c_0, \quad X = x - x_i, \quad (8)$$

11 個の未知数 ($a_{0,\pm 1}, b_{0,\pm 1}, c_{0,\pm 1}$) と (d, e) を求める必要があるが、まず連続条件から

$$\begin{aligned} u_{i\pm 1,2} &= a_{\pm 1}(\Delta y_1 + \Delta y_2)^2 + b_{\pm 1}(\Delta y_1 + \Delta y_2) + c_{\pm 1}, \\ u_{i\pm 1,1} &= a_{\pm 1}\Delta y_1^2 + b_{\pm 1}\Delta y_1 + c_{\pm 1}, \\ c_{+1} &= d\Delta x_{i+1}^2 + e\Delta x_{i+1} + c_0, \\ c_{-1} &= d\Delta x_i^2 - e\Delta x_i + c_0, \end{aligned} \quad (9)$$

となる。ここで $c_0 = u_{i,0}$, $c_{\pm 1} = u_{i\pm 1,0}$ である。また、式(8)から $(-\Delta x_i \leq X \leq \Delta x_{i+1})$ 間では局所的に接線方向の 2 階微分は $\partial^2 u / \partial x^2|_{y=0} = 2d$ であるから、式(6)より

$$\begin{aligned} u_{i\pm 1,0} &= c_{\pm 1} = u_w + A_1 Kn \cdot b_{\pm 1} - A_2 Kn^2(2a_{\pm 1} + d), \\ u_{i,0} &= c_0 = u_w + A_1 Kn \cdot b_0 - A_2 Kn^2(2a_0 + d), \end{aligned} \quad (10)$$

と式(5)から 11 個の未知数を Newton 法で決定出来るので、 $x = x_i$ での流速 $u_{i,0} = c_0$ を求めることが出来る。

注意すべき点は、壁面上の正しい速度分布 u_{true} は N-S 方程式から得られる u_{NS} と、クヌッセン層 u_{Kn} の和で表されるが、本論で得られる速度場は u_{NS} のみであることからクヌッセン層厚さが小さい $Kn < O(10^{-1})$ の流れでしか適用出来ない。

しかし、流れはほぼ層流であることから壁面付近の流れ場も緩やかであり、層流境界層でのプラントルの式の様な 2 次関数近似で十分 u_{NS} を表すことが出来ると考えられる。

3. 計算結果

本計算方法を 2 次元 Cavity 流れに適用し、比較検討を行う。本論では剛体球モデルとし $\alpha = 5\pi/16$ を用いた。また、 $Re = 0.3$ と固定し $Ma = O(10^{-3})$ となる様に設定した。式(6)の Deissler 型では $(A_1, A_2) = (1.0, 9/8)$ であるが、式(3)では例えばポアズイユ流れでは Kn 層を考慮した $(A_1, A_2) = (1.11, 0.61)$ が用いられる⁶⁾。しかし本論では接線方向の 2 階滑り効果を検証する為、式(3)で同じ滑り係数、Maxwell 型 1 階滑り条件 $(A_1, A_2) = (1.0, 0.0)$ の 3 種類で比較を行った。格子数は $(N_x, N_y) = (50, 50)$ 、4 つの壁面付近が細かい不等間隔格子を用いた。代表速度は上壁面 ($y = 1$) の速度とし、 $y = 1$ の壁面が $u = 1$ で移動、他の 3 面は静止壁である。

図 2 は定常状態における $Kn = 0.1$ の流線と y 方向速度 v の等高線の比較を示している。流線は渦中心近傍に僅かに違いが見られる程度で渦の中心位置、低 Re 数での cavity 流れに見られる流線の左右対称性はほぼ変わらない。一方、 v の等高線は上隅付近の分布に 1 階滑りと 2 階滑りで若干の違いが見られる。図 3 は $x = 0.5$ の速度 v 、渦中心付近の $y = 0.778$ での速度 u を $Kn = 0.01, 0.1$ で 3 つの境界条件で比較した結果である。流れの左右対称性より図 3(b)は左半分のみ示している。 $Kn = 0.01$ では滑りの効果は 3 条件でほぼ違いは無いが、 $Kn = 0.1$ では図 3(b)では壁面上の滑り速度と分布の違いが生じる。特に式(6)では接線方向の効果も加わり滑りは大きくなるが、分布は滑らかなることが分かる。

4. 結言及び今後

本論では中程度希薄流における平面での 1 階・2 階滑り条件の導入及び滑り効果の比較を行った。今後は 3 次元及び曲

面への拡張を行い、MEMS 等への一般的な応用を目指す。

Fig.2 Two-dimensional cavity flow for $Kn=0.1$ of (a)Eq. (3), (b)Eq. (6) for $(A_1, A_2) = (1.0, 9/8)$, (c) $(A_1, A_2) = (1.0, 0.0)$.

Left : Stream lines, Right : y -component of velocity v

Fig.3 Comparison of velocity; 2nd-order slip Eqs. (3) and (6) with 1st-order slip. (a)velocity u at $x = 0.5$, (b)velocity v at $y = 0.778$.

参考文献

- (1) Ogata, Y., and T. Kawaguchi., *J. Fluid Sci. Tech.*, 6(2011), 215-229.
- (2) Cercignani, C., *Inst. Eng. Research Report AS-6419*(1964), Univ. of California.
- (3) Deissler, R.G., *Int. J. Heat Mass Transfer*, 7 (1964), 681-694.
- (4) Naris, S. and Valougeorgis, D., *Phys. Fluids*, 17(2005), 097106-1-12.
- (5) Yabe, T., and Wang, P.Y., *J. Phys. Soc. Japan*, 60 (1991), 2105-2108.
- (6) Hadjiconstantinou, N. G., *Phys. Fluids*, 15(2003), 2352-2354.