四面体要素の発生・消滅を伴う移動格子有限体積法

Moving-Grid Finite-Volume Method with Addition and Elimination of Tetrahedrons

○学 光成 直也・京工繊大院

正 山川 勝史・京工繊大

正 松野 謙一・京工繊大

Naoya MITSUNARI
Kyoto Institute of Technology
Matsugasaki KyotoMasashi YAMAKAWA
Kyoto Institute of Technology
Matsugasaki KyotoKenichi MATSUNO
Kyoto Institute of Technology
Matsugasaki Kyoto

Key Words: Moving-Grid Finite-Volume Method, Unstructured Mesh, Compressible Flow

1. 諸言

ロケット打ち上げ過程にある補助ロケットの分離などのような複雑な移動・変形を伴う物体周りの流れ場は広くみられる。これらは移動境界問題と呼ばれ、その一つの計算手法として、時間と空間を合わせた検査体積を考慮し定式化した移動格子有限体積法⁽¹⁾がある。ただし、複雑な変形を伴う場合には、格子の移動に伴い計算要素の疎密や歪な形状の要素の発生を引き起こしてしまう可能性があり、それが計算精度の低下に繋がってしまう恐れがある。

そこで著者らは上記の問題を解決するため、格子の疎密に合わせて随時格子点を追加・削除する方法⁽²⁾を提案している。計算要素が拡大する場合には新たな格子点を追加し、縮小する場合には格子点を削除し、要素を常に均一化することで、高い精度を維持したままの計算が期待できる。しかし非構造格子系においては、そのアルゴリズムが非常に複雑となることなどを理由に、この手法は実用上重要な意味を持つ3次元化には到達していなかった。

以上より、本研究ではこの手法を3次元の非構造格子系に拡張して、計算スキームに対する検証を行い、その有効性を確認した。また、移動境界問題としてピストンの圧縮問題を取り扱い、本手法の実用性を示した。

2. 基礎方程式

基礎方程式として、非粘性圧縮性流体に対する次式で示される無次元化された3次元オイラー方程式を用いる。

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{q}$ は保存量ベクトル、 $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}$ はそれぞれ x, y, z 方向の非粘性流束ベクトルである。

3. 3次元非構造移動格子有限体積法

3-1 移動格子有限体積法⁽³⁾

時間の経過とともに格子が移動すると、時間と空間を合わせた領域における検査体積を考える必要がある。3次元空間の場合、検査体積はFig.1に示すような n 時間段階と $n+1$ 時間段階のセルによって形成される4次元的な体積となる。

Fig.1 Control volume

式(1)についてFig.1に示す検査体積のもとで体積積分を行い、さらにガウスの発散定理を用いることによって、次式が得られる。

$$\sum_{l=1}^6 (\tilde{\mathbf{F}} \cdot \tilde{\mathbf{n}})_l = 0 \quad (2)$$

$$\tilde{\mathbf{F}} = [\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{q}]^T, \quad \tilde{\mathbf{n}} = [n_x, n_y, n_z, n_t]^T \quad (3)$$

ここで、 $l=1, 2, \dots, 6$ は検査体積内の各体積を表し、 $\tilde{\mathbf{n}}$ はそれぞれの外向き法線ベクトルを示す。ただし、 $l=5$ および 6 はそれぞれ、 n および $n+1$ 時間段階での四面体セルの体積であり、法線ベクトルは t 方向成分しか持たないため、式(2)は次式のように変形できる。

$$\mathbf{q}^{n+1}(n_t)_6 + \mathbf{q}^n(n_t)_5 + \sum_{l=1}^4 (\tilde{\mathbf{F}} \cdot \tilde{\mathbf{n}})_l^{n+1/2} = 0 \quad (4)$$

式(4)を解くことによって、格子の移動が流れ場に影響を与えない、すなわち幾何保存則を満足したまま計算を行うことができる。

3-2 計算要素の発生を伴う移動格子有限体積法

新たな四面体要素を発生させる際、四面体の1辺上に格子点を追加し、要素の分割を行う。この時、Fig.2に示すような検査体積のもとで幾何保存則を満たす離散化を行う必要がある。要素Aについては式(4)の離散式を用い、新たに発生する要素Bについては n 時間段階での体積が0となるので、式(4)において、 $(n_t)_5 = 0$ となり、離散式は次式となる。

$$\mathbf{q}^{n+1}(n_t)_6 + \sum_{l=1}^4 (\tilde{\mathbf{F}} \cdot \tilde{\mathbf{n}})_l^{n+1/2} = 0 \quad (5)$$

Fig.2 Control volume in the case of division

3-3 計算要素の消滅を伴う移動格子有限体積法

既存の四面体要素を消滅させる際、四面体の1辺を構成する2つの格子点を重ね合わせる。この時、Fig.3に示すような n 時間段階における要素Aと要素Bを合わせた検査体積のもとで離散化を行う。よって、解くべき離散式は式(3)について n 時間段階の2つの要素を合わせた次式となる。

$$\mathbf{q}_A^n \{ (n_t)_7 \}_A + \mathbf{q}_B^n \{ (n_t)_7 \}_B + \mathbf{q}_A^{n+1} \{ (n_t)_8 \}_A + \sum_{l=1}^6 (\tilde{\mathbf{F}} \cdot \tilde{\mathbf{n}})_l^{n+1/2} = 0 \quad (6)$$

Fig.3 Control volume in the case of union

ここで非粘性流束ベクトル $\tilde{\mathbf{F}}$ はRoeの流束差分法⁽⁴⁾を用いて評価する。また、空間高次精度化には数値振動を抑制するため、Venkatakrishnanの制限関数⁽⁵⁾を用いる。式(4)~(6)を解くための擬似時間内部反復法には2段階有理Runge-kutta法を用いる。

4. 幾何保存則に対する検証

Fig.4に示す $1.0 \times 1.0 \times 1.0$ の計算領域内に一様流を流した。この時、内部の格子点を移動および追加・削除させても、流れ場に影響を与えることなく計算できるか確認した。

Fig.4 Moving grids with addition and elimination of elements

Fig.5 Error of density

Fig.5に示すように密度の初期値との誤差が 10^{-14} から 10^{-12} のオーダーであったことから、本手法が幾何保存則を満足しながら計算できることが確認できた。

5. 移動境界問題に対する検証

Fig.6に示すように、次式に示すピストン速度 U_p で $1.5 \times 0.5 \times 0.5$ のシリンダー内の空気を圧縮させる。

$$U_p = \begin{cases} 10t & t < 0.1 \\ 1.0 & t \geq 0.1 \end{cases} \quad (7)$$

その際に生じる衝撃波の位置における厳密解⁽⁶⁾との比較をFig.7に示しており、これらが良好に一致していることから、本手法が移動境界問題にも適用可能なことが確認できた。

Fig.6 Computational grids for piston compression

Fig.7 Shock wave positions

6. 結言

非粘性圧縮性流れに対して、要素の発生・消滅を伴う非構造移動格子有限体積法を3次元へ拡張させ、計算を行ったことにより以下の結論を得た。

- 本手法は幾何保存則を完全に満たし、その有効性を示した。
- 移動境界問題に適用できたことから、本手法の高い応用性を示した。

参考文献

- (1)三原 他2名, 機論, 65-637, B(1999), 2945-2953
- (2)山川, 松野, 機論, 70-689, B(2004), 25-30
- (3)山川, 松野, 機論, 69-683, B(2003), 1577-1582
- (4)Roe, P.L., Journal of Computational Physics, 43, (1981), 357-372
- (5)Venkatakrishnan V., AIAA Paper, 93-0880, (1993)
- (6)生井, 松尾, 衝撃波の力学, (1983), コロナ社