非圧縮性流れに対する非構造移動格子有限体積法

Unstructured Moving-Grid Finite-Volume Method for Incompressible Flows.

○井ノ本健 (京工繊大)

松野謙一 (京工繊大)

山川勝史 (京工繊大)

Takeshi Inomoto, Kyoto Institute of
TechnologyKenichi Matsuno, Kyoto Institute of
TechnologyMasashi Yamakawa, Kyoto Institute of
TechnologyKey Words: *Unstructured Grid, FVM, Incompressible Flow*

Abstract

When we simulate flows on moving-grid time-dependently, the Moving-Grid Finite-Volume Method is crucial. The method was firstly proposed for compressible flows. Subsequently, the method for incompressible flows was applied to the structured grid, but it has not been applied to the unstructured grid yet. The unstructured grid is crucial to simulate flows with the complex-shaped body. On the other hand, the influence of flows ~~on~~ driven by body-motion is important. In this paper, we propose a new Unstructured Moving-Grid Finite-Volume Method based on fractional step method for incompressible flows. Moreover, we apply this method to the coupled problem of fluid-flow and body-motion.

1. はじめに

移動境界を含む流れ場をシミュレーションする手法に、空間と時間を合わせた計算格子を用いる移動格子有限体積法がある。この移動格子有限体積法は、最初、圧縮性流れに対して提案され、その後、非圧縮性流れへと拡張された。この非圧縮性流れに対する移動格子有限体積法は、構造格子において、その有効性が示されている。しかし、格子形成の自由度が低い構造格子では複雑形状を有する流れ場への応用に限界がある。そこで、本論文では、自由度の高い非構造格子における非圧縮性流れに対する移動格子有限体積法を新しく提案し、検証問題の計算を行う。また、物体の運動も考慮した応用問題の計算を行う。

2. 数値計算法

2-1 非圧縮性流れにおける基礎方程式

三次元非圧縮性粘性流れの基礎方程式を無次元化し保存型ベクトル表示で書くと、次式のようになる。

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\mathbf{E}}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\mathbf{F}}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\mathbf{G}}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{P}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{P}_2}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{P}_3}{\partial z} = 0$$

ここで、 $\mathbf{q}$ は保存量ベクトル、 $\hat{\mathbf{E}}$, $\hat{\mathbf{F}}$, $\hat{\mathbf{G}}$ は x , y , z 方向の移流項と粘性項を合わせた流束ベクトル、 $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ は圧力であり、次のようにベクトル表示される。

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} u^2 + \tau_{11} \\ uv + \tau_{12} \\ uw + \tau_{13} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} vu + \tau_{21} \\ v^2 + \tau_{22} \\ vw + \tau_{23} \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} wu + \tau_{31} \\ wv + \tau_{32} \\ w^2 + \tau_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{\text{Re}} \begin{bmatrix} \partial u / \partial x & \partial u / \partial y & \partial u / \partial z \\ \partial v / \partial x & \partial v / \partial y & \partial v / \partial z \\ \partial w / \partial x & \partial w / \partial y & \partial w / \partial z \end{bmatrix}$$

ここで、 u , v , w は x , y , z 方向の流速、 p は静圧、 Re はレイノルズ数である。

2-2 Fractional Stepを用いた移動格子有限体積法

基礎方程式を次式のように二段階に分けて計算する。

第一段階,

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\mathbf{E}}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\mathbf{F}}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\mathbf{G}}}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

第二段階,

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{P}_2}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{P}_3}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

式(1), (2)を移動格子有限体積法を用いて離散化すると次のようになる。

第一段階,

$$\mathbf{q}^*(n_t S)_6 + \mathbf{q}^n(n_t S)_5 + \frac{1}{2} \left[\sum_{l=1}^4 \{(\Phi^* + \Phi^n) S\}_l \right] = 0 \quad (3)$$

$$\Phi = \mathbf{q} n_t + \hat{\mathbf{E}} n_x + \hat{\mathbf{F}} n_y + \hat{\mathbf{G}} n_z$$

第二段階,

$$(\mathbf{q}^{n+1} - \mathbf{q}^*)(n_t S)_6 + \left[\sum_{l=1}^4 \{(\mathbf{P}_1^{n+1/2} n_x + \mathbf{P}_2^{n+1/2} n_y + \mathbf{P}_3^{n+1/2} n_z) S\}_l \right] = 0 \quad (4)$$

Fig.1: Cell.

ここで、上付きは時間ステップを表し、 n_x, n_y, n_z, n_l ($l=1, 2, 3, 4$) は n 時間ステップと $n+1$ 時間ステップのセルの各面で形成される体積の各方向成分を表す。例えば $l=4$ なら Fig.1 の色の黒い部分を表す。また、 $n_l S$ ($l=5, 6$) はそれぞれ n 時間ステップと $n+1$ 時間ステップのセルの体積を表す。

次に、式(4)の発散をとると次式ようになる。

$$(D^{n+1} - D^*)(n_l S)_6 + \left[\sum_{l=1}^4 \left\{ \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} n_x + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} n_y + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} n_z \right) S \right\}_l \right] = 0 \quad (5)$$

ここで、

$$D = \frac{\partial u}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial v}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial w}{\partial \tilde{z}} \\ (\tilde{p}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = (p^{n+1/2}, x^{n+1}, y^{n+1}, z^{n+1})$$

$n+1$ 時間ステップでは連続の式が満たされている ($D^{n+1} = 0$) と仮定すると、式(5)は次のようなポアソン方程式になる。

$$-D^*(n_l S)_6 + \left[\sum_{l=1}^4 \left\{ \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} n_x + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} n_y + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} n_z \right) S \right\}_l \right] = 0 \quad (6)$$

計算手順としては、まず、式(3)から既知の n 時間ステップの保存量を基に中間時間ステップの保存量 q^* を算出する。次に、式(6)から $\tilde{p}$ を算出して、最後に式(4)から $n+1$ 時間ステップの保存量を算出する。ここで、本論文では、移流項の離散化には2次精度の風上差分型近似、粘性項、圧力項の離散化には中心差分型近似、式(3)の解法にはLU-SGS、式(6)のポアソン方程式の解法にはBi-CGSTABを採用した。

3. 計算結果

3-1 検証問題 (球周り流れ)

格子が時間とともに移動変形する検証問題として、Fig.2 に示すような領域における球周り流れの計算を行った。(球の中心: $x=y=z=0$) 球と格子は移動せずに一様流を流入した条件 (Case1) と、流入がない状態で球と格子を移動した条件 (Case2) での計算を行い、結果を比較した。計算条件としては、 $Re=100$, $\Delta t=0.01$ である。Fig.3 と 4 に、それぞれ Case1, 2 での $z=0$ 断面での圧力分布を示す。また、Table.1 に Case1, 2 と他者が計算した抵抗係数を示す。Case1, 2 の圧力分布、抵抗係数ともによく一致し、他者の計算結果とも一致する結果が得られたことから、本手法の信頼性を確認した。

Fig.2: Simulation region.

Fig.2: Pressure (Case1).

Fig.3: Pressure (Case2).

Table.1: Drag coefficient.

	Case1	Case2	Shirayama
抵抗係数 Cd	1.104	1.105	1.104

3-2 応用問題 (吹き玉)

物体の運動を考慮した応用問題として、吹き玉の計算を行った。吹き玉とは、球の下方から噴流を吹き付けると、球はその噴流から外れることなく浮き続けるという古典的な遊びの一種である。計算条件としては、 $Re=1000$, $\Delta t=0.01$ である。Fig.4 に異なる時間での $z=0$ 断面での流速分布を示し、黒いほど流速の大きい領域である。噴流内から外れそうになった球が再び噴流内に戻ってくる様子を再現した。

Fig.4: Velocity.

参考文献

- (1).N.N.Yanenko : The Method of Fractional Steps.
- (2).松野謙一 : 数値流体力学会誌, 3-2(1995), 103-114
- (3).S.Shirayama : AIAA Journal, 30(1992), 349-358