平織積層板のマクロ／メゾ／ミクロ非弾性解析手法の開発と実験的評価

Development and Experimental Evaluation of Macro/Meso/Micro Inelastic Analysis Method for Plain-Woven Laminates

○学 大出 航平・筑波大学院

正 松田 哲也・筑波大

学 後藤 圭太・筑波大院

Kohei OIDE, University of Tsukuba

Tetsuya MATSUDA, University of Tsukuba

Keita GOTO, University of Tsukuba

Key Words: <Plain-Woven laminate, Homogenization, Multi-scale analysis>

In this study, macro/meso/micro inelastic analysis method for plain-woven laminates is developed based on a homogenization theory for nonlinear time-dependent composites. For this, a three-scale modeling of plain-woven laminates is performed by considering a plain-woven laminate as a macrostructure, fiber bundles (yarns) and a matrix in the laminate as a mesostructure, and fibers and a matrix in the yarns as a microstructure. Then, a macroscopic constitutive equation of the laminate is derived by dually applying the homogenization theory for nonlinear time-dependent composites to not only the meso/micro scale but also the macro/meso scale. Using the present analysis method, the elastic-viscoplastic analysis of a plain-woven glass fiber/epoxy laminate subjected to on- and off-axis loading is performed. Moreover, the analysis results are compared with the experimental data. It is shown that the present analysis method successfully takes into account the effects of inelastic properties of the epoxy not only around the fiber bundles but also inside of the fiber bundles. It is also shown that the results of analysis are in good agreement with experimental data.

1. 緒言

平織積層板は、数百本の繊維から成る繊維束を織り込んだ平織布を積層し、母材として樹脂材料を含浸させた複合材料である。この材料は高非強度・高比剛性・耐食性といった優れた特徴を有することから、近年では航空宇宙・運搬・エネルギー機器といった様々な分野において構造用材料として用いられており、その非線形材料特性を明らかにすることは非常に重要な課題の一つとなっている。平織積層板は、繊維／母材の組合せにより使用者の意図に沿った様々な材料特性を付与できる“設計可能な材料”である反面、それらの組み合わせが無数に存在するため、全ての組み合わせに対してその材料特性を実験的に求めるとなるとコストが膨大となる。したがって、今日の産業界では平織積層板の材料特性を効率良く求める手法が必要とされている。

平織積層板の微視構造は、図1のような周期的内部構造を有していると考えられる。このような微視的周期材料の特性解析に有用な手法として、マルチスケール解析手法の一つであるユニットセル解析に基づく均質化理論が挙げられる⁽¹⁾。本研究グループにおいても、この均質化理論を用いた平織積層板の弾-粘塑性解析が行われてきた⁽²⁾。これらの解析では、平織積層板中の繊維束は均質化弾性体とみなされてきたが、実際の平織積層板においては、図1のように繊維束内部にも繊維と母材からなる微視構造が存在しているから、繊維束内の母材が呈する非弾性挙動を考慮する必

要がある。

そこで本研究では、繊維束内部のミクロ構造を考慮可能な平織積層板のマリスケール非弾性解析手法の新規開発を行う。このためまず、図1のように平織積層板をマクロ・メゾ・ミクロの三つのスケールで定義し、マクロ／メゾ間およびメゾ／ミクロ間で均質化理論を適用し、それらの関係性を検討することで、平織積層板の巨視的な構成式を導出する。さらに、本解析手法を用いて平織 GFRP 積層板の弾-粘塑性解析を実施し、実験結果と比較することで、本解析手法の妥当性を検証する。

2. 問題設定

図1のような微視的周期構造を有する平織積層板 Ω が、巨視的様な負荷を受けて変形をする場合を考える。いま、 Ω の微視構造の最小構成単位として、繊維束と母材からなる基本セル A を定義して、その境界を Γ_A とし、 A におけるスケール（メゾスケール）に対して直交座標系 x_i を設ける。さらに、 A 内における繊維束領域 A_y の微視構造の最小構成単位として半ユニットセル B を定義して、その境界を Γ_B とし、 B におけるスケール（ミクロスケール）に対して直交座標系 y_i を設ける。なお本論文では便宜上、マクロ・メゾ・ミクロ各スケールにおける変数に、上付き添え字 0, 1 および 2 をそれぞれ付することとする。

Fig. 1 Three-scale model of plain-woven laminates

3. メゾ／マイクロ問題

半ユニットセル B におけるマイクロ応力速度分布とマイクロひずみ速度分布をそれぞれ ${}^2\dot{\sigma}_{ij}(\mathbf{y}, t)$ および ${}^2\dot{\epsilon}_{ij}(\mathbf{y}, t)$ と表す。ここで、 $(\cdot)$ は時間 t に関する微分を示し、 y_i に関する偏微分を $(\cdot)_{,y_i}$ と表すと、応力の釣合式は次のように書くことができる。

$${}^2\dot{\sigma}_{ij,y_j} = 0 \quad (1)$$

また、繊維束の各構成相のマイクロ構成式を次式のように定義する。

$${}^2\dot{\sigma}_{ij} = {}^2c_{ijkl}({}^2\dot{\epsilon}_{kl} - {}^2\beta_{kl}) \quad (2)$$

ここで、 ${}^2c_{ijkl}$ と ${}^2\beta_{kl}$ はそれぞれ B における繊維と母材の弾性剛性テンソルおよび粘塑性関数であり、

$$\begin{aligned} {}^2c_{ijkl} &= c_{ijkl}^f \text{ or } c_{ijkl}^m \\ {}^2\beta_{kl} &= \beta_{kl}^f \text{ or } \beta_{kl}^m \end{aligned} \quad (f: \text{fiber}, m: \text{matrix}) \quad (3)$$

と表せる。つづいて、マイクロ擾乱変位速度場 ${}^2\dot{u}_i^{\#}(\mathbf{y}, t)$ の任意の変分を ${}^2v_i(\mathbf{y}, t)$ とすると、式(1)は部分積分および発散定理を適用し、次式を得る。

$$\int_B {}^2\dot{\sigma}_{ij} {}^2v_{i,y_j} dB - \int_{\Gamma_B} {}^2\dot{\sigma}_{ij} n_j {}^2v_i d\Gamma_B = 0 \quad (4)$$

ここで、 n_i はユニットセル境界における外向き単位法線を表す。上式の境界積分項は、 Γ_B における ${}^2\dot{\sigma}_{ij}$ と 2v_i の点対称性により境界全体で零となるため⁽³⁾、次式を得る。

$$\int_B {}^2\dot{\sigma}_{ij} {}^2v_{i,y_j} dB = 0 \quad (5)$$

上式に式(2)を代入し、次のような半ユニットセル B に対する境界値問題が導かれる。

$$\int_B {}^2c_{ijpq} {}^2\chi_{p,y_q}^{\text{kl}} {}^2v_{i,y_j} dB = - \int_B {}^2c_{ijkl} {}^2v_{i,y_j} dB \quad (6)$$

$$\int_B {}^2c_{ijpq} {}^2\varphi_{p,y_q} {}^2v_{i,y_j} dB = \int_B {}^2c_{ijkl} {}^2\beta_{kl} {}^2v_{i,y_j} dB \quad (7)$$

ここで、 ${}^2\chi_{p,y_q}^{\text{kl}}$ と ${}^2\varphi_{p,y_q}$ は境界値問題(6)および(7)を解くことで得られる特性関数であり、マイクロ応力の発展式は次のように表される。

$${}^2\dot{\sigma}_{ij} = {}^2c_{ijpq} \left(\delta_{pk} \delta_{ql} + {}^2\chi_{p,y_q}^{\text{kl}} \right) {}^2\dot{\epsilon}_{kl} - {}^2c_{ijkl} \left({}^2\beta_{kl} - {}^2\varphi_{k,y_l} \right) \quad (8)$$

ここで、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタを表す。さらに上式に、 B に関する体積平均 $\langle \cdot \rangle_B$ を作用させることで、メゾスケールにおける構成式が次式のように導かれる。

$${}^1\dot{\sigma}_{ij} = \left\langle {}^2c_{ijpq} \left(\delta_{pk} \delta_{ql} + {}^2\chi_{p,y_q}^{\text{kl}} \right) \right\rangle_B {}^1\dot{\epsilon}_{kl} - \left\langle {}^2c_{ijkl} \left({}^2\beta_{kl} - {}^2\varphi_{k,y_l} \right) \right\rangle_B \quad (9)$$

4. マクロ／メゾ問題

メゾスケール座標系 x_i に関する偏微分を $(\cdot)_{,x_i}$ とすると、基本セル A における応力の釣合式は

$${}^1\dot{\sigma}_{ij,x_j} = 0 \quad (10)$$

と表せる。また、平織積層板の各構成相のメゾ構成式を次のように定義する。

$${}^1\dot{\sigma}_{ij} = {}^1c_{ijkl}({}^1\dot{\epsilon}_{kl} - {}^1\beta_{kl}) = {}^1c_{ijkl}{}^1\dot{\epsilon}_{kl} - {}^1c_{ijkl}{}^1\beta_{kl} \quad (11)$$

ここで、 ${}^1c_{ijkl}$ と ${}^1\beta_{kl}$ はそれぞれ A における繊維束と母材の弾性剛性テンソルおよび粘塑性関数であり、

$$\begin{aligned} {}^1c_{ijkl} &= c_{ijkl}^y \text{ or } c_{ijkl}^m \\ {}^1\beta_{kl} &= \beta_{kl}^y \text{ or } \beta_{kl}^m \end{aligned} \quad (y: \text{yam}, m: \text{matrix}) \quad (12)$$

と表せる。ただし繊維束においては、式(9)と(11)の比較から次の関係があることに留意する。

$${}^1c_{ijkl} = c_{ijkl}^y = \left\langle {}^2c_{ijpq} \left(\delta_{pk} \delta_{ql} + {}^2\chi_{p,y_q}^{\text{kl}} \right) \right\rangle_B \text{ in } A_y \quad (13)$$

$${}^1\beta_{kl} = \beta_{kl}^y = \left\langle {}^2\beta_{kl} - {}^2\varphi_{k,y_l} \right\rangle_B \text{ in } A_y \quad (14)$$

つづいて、メゾ擾乱変位速度場 ${}^1\dot{u}_i^{\#}(\mathbf{x}, t)$ の任意の変分を

${}^1v_i(\mathbf{x}, t)$ とし、 Γ_A における ${}^1\dot{\sigma}_{ij}$ と 1v_i の Y -周期性⁽⁴⁾および点対称性⁽³⁾を考慮すると、前節と同様に式(10)は次のように表される。

$$\int_A {}^1\dot{\sigma}_{ij} {}^1v_{i,x_j} dA = 0 \quad (15)$$

上式に式(11)を代入し、次のような A に対する境界値問題が導かれる。

$$\int_A {}^1c_{ijpq} {}^1\chi_{p,x_q}^{\text{kl}} {}^1v_{i,x_j} dA = - \int_A {}^1c_{ijkl} {}^1v_{i,x_j} dA \quad (16)$$

$$\int_A {}^1c_{ijpq} {}^1\varphi_{p,x_q} {}^1v_{i,x_j} dA = \int_A {}^1c_{ijkl} {}^1\beta_{kl} {}^1v_{i,x_j} dA \quad (17)$$

ここで、 ${}^1\chi_{p,x_q}^{\text{kl}}$ と ${}^1\varphi_{p,x_q}$ は境界値問題(16)および(17)を解くことで得られる特性関数であり、 A に関する体積平均を $\langle \cdot \rangle_A$ とすると、メゾ応力の発展式および平織積層板のマクロ構成式は次のように表される。

$${}^1\dot{\sigma}_{ij} = {}^1c_{ijpq} \left(\delta_{pk} \delta_{ql} + {}^1\chi_{p,x_q}^{\text{kl}} \right) {}^0\dot{\epsilon}_{kl} - {}^1c_{ijkl} \left({}^1\beta_{kl} - {}^1\varphi_{k,x_l} \right) \quad (18)$$

$$\begin{aligned} {}^0\dot{\sigma}_{ij} &= {}^0c_{ijkl}({}^0\dot{\epsilon}_{kl} - {}^0\beta_{kl}) \\ &= \left\langle {}^1c_{ijpq} \left(\delta_{pk} \delta_{ql} + {}^1\chi_{p,x_q}^{\text{kl}} \right) \right\rangle_A {}^0\dot{\epsilon}_{kl} - \left\langle {}^1c_{ijkl} \left({}^1\beta_{kl} - {}^1\varphi_{k,x_l} \right) \right\rangle_A \end{aligned} \quad (19)$$

5. 解析条件

解析対象として、SL-E-1ガラス／エポキシ平織積層板（日東シンコー（株）製）を考え、顕微鏡観察結果から基本セルおよび半ユニットセルを構築した（図2および図3参照）。また、半ユニットセルは繊維方向一様とし、一般化平面ひずみ条件を仮定し2次元セルとした。積層板の繊維束中の繊維体積率は75%である。解析を行う際、メゾスケールの基本セルは、繊維束要素の全積分点にミクロスケールの半ユニットセルが割り当てられていることとし、繊維束部の弾性剛性テンソルおよび粘塑性関数はミクロスケールから均質化した値を用いる(式(13)・(14))。その際、繊維束はうねりを有しているため、メゾスケールにおける直交座標系 x_i を基準とし、 x_i と繊維方向のなす角度に応じてミクロ／メゾ均質化量を座標変換し、それらを繊維束部に与えている。

負荷条件として、 x_1 - x_3 平面内において x_3 軸方向から

Fig. 2 Basic cell A and finite element mesh: (a) full view and (b) yarns in basic cell.

Fig. 3 Semiunit cell B and finite element mesh.

Table 1 Material constants.

Glass fiber	$E_f = 80.0 \times 10^3$	$\nu_f = 0.30$
Epoxy	$E_m = 5.0 \times 10^3$	$\nu_m = 0.35$
	$\dot{\epsilon}_0^p = 1.0 \times 10^{-5}$	
	$n = 25$	$g(\bar{\epsilon}^p) = 105.0(\bar{\epsilon}^p)^{0.20} + 24.5$
MPa(stress),mm/mm(strain),s(time)		

$0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ 回転した方向に一定のマクロひずみ速度 $\dot{\epsilon}_0 = 10^{-5} [\text{s}^{-1}]$ を与え、マクロひずみが1.0%に達するまで解析を行った。境界条件は、メゾスケールモデルにはY-周期境界条件および点対称境界条件、ミクロスケールモデルには点対称境界条件を適用した。ガラス繊維は等方弾性体とし、エポキシは次の構成式

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1+\nu_m}{E_m} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\nu_m}{E_m} \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} + \frac{3}{2} \dot{\epsilon}_0^p \left[\frac{\sigma_{eq}}{g(\bar{\epsilon}^p)} \right]^n \frac{s_{ij}}{\sigma_{eq}} \quad (20)$$

に従う等方弾-粘塑性体とした。ここで、 E_m 、 ν_m および n はエポキシの材料定数、 $g(\bar{\epsilon}^p)$ は相当粘塑性ひずみ $\bar{\epsilon}^p$ に依存する硬化関数、 $\dot{\epsilon}_0^p$ は参照ひずみ速度であり s_{ij} は σ_{ij} の偏差を表す。材料定数は表1の通りとした。

6. 解析結果および実験結果との比較

図4にマクロスケールにおける応力-ひずみ曲線を示す。これを見ると、負荷方向によって応力-ひずみ関係が大きく変化しており、平織積層板の顕著な弾-粘塑性異方性を確認することができる。また、解析結果を実験値と比較すると、両者が非常に良い一致を示しており、本解析手法が平織積層板の巨視的特性を精度良く予測できていることがわかる。次に、 0° および 45° 方向引張において ϵ_0 が1.0%に達した際のメゾスケールでの相当粘塑性ひずみ分布をそれぞれ図5および図6に示す。また、 45° 方向引張の繊維束内の点(i), (ii)におけるミクロスケールでの相当粘塑性ひずみ分布を図7に示す。まず、メゾスケールにおける粘塑性ひずみ分布を見ると、繊維束周囲の母材だけでなく繊維束内部にも粘塑性ひずみが発生しており、特に非主軸引張において顕著に発生していることが確認できる。さらにミクロスケールにおける粘塑性ひずみ分布を見ると、メゾスケールよりもさらに顕著な粘塑性ひずみが母材部に発生していることがわかる。これらの結果は、繊維束内部の微視構造まで考慮した本解析手法で新たに見ることができたものであり、従来の手法での解析では得られなかった結果である。これらのことから、本解析手法は繊維/母材の材料特性のみを用いることで、平織積層板の巨視的な特性を高精度に予測できるだけでなく、メゾスケールの繊維束/母材やミクロスケールの繊維束内部における母材の非弾性挙動を見ることができると、本手法の妥当性・重要性を示せたと言える。

文 献

- (1) Sanchez-Palencia, E., Non-homogeneous Media and Vibrations on Theory, Lecture Notes in Physics, No. 127 (1980), Springer-Verlag.
- (2) Matsuda, T., Kanamaru, S., Yamamoto, N. and Fukuda, Y., International Journal of Plasticity, Vol.27 (2011), pp.2056-2067.
- (3) Ohno, N., Matsuda, T. and Wu, X., International Journal of Solids and Structures, Vol.38 (2001), pp.2867-2878.
- (4) Ohno, N., Wu, X. and Matsuda, T., International Journal of Mechanical Sciences, Vol.42 (2000), pp.1519-1536.

Fig. 4 Macroscopic stress-strain relations.

Fig. 5 Mesoscopic equivalent viscoplastic strain distribution ($\theta = 0^\circ$), (a) yarns and matrix, (b) yarns.

Fig. 6 Mesoscopic equivalent viscoplastic strain distribution ($\theta = 45^\circ$), (a) yarns and matrix, (b) yarns.

Fig. 7 Microscopic equivalent viscoplastic strain distribution at (i) and (ii).