境界要素法とレベルセット法を用いた 2 次元電磁波動問題における多目的トポロジー最適化

A multiobjective topology optimization for 2D electromagnetic wave problems
with the level set method and BEM

非 北林 達也 (名古屋大学) 正 飯盛 浩司 (名古屋大学)
正 高橋 徹 (名古屋大学) 正 松本 敏郎 (名古屋大学)

Tatsuya KITABAYASHI, Nagoya University, Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya-shi, Aichi
Hiroshi ISAKARI, Nagoya University, Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya-shi, Aichi
Toru TAKAHASHI, Nagoya University, Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya-shi, Aichi
Toshiro MATSUMOTO, Nagoya University, Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya-shi, Aichi

Key word: BEM, Topological derivative, TE mode, TM mode, Kreisselmeier Steinhauser function

1 緒言

近年、光学デバイスの発達は著しく、様々な新規デバイスの提案がなされている。中でも、物体の周りの光の伝播をコントロールし、あたかも透明であるかのような状況を作り出すクローキングデバイスが注目を集めている^{1, 2)}。クローキングデバイスを実現するためには、特定の物体の周りで光の散乱を抑える構造を設計する必要がある。

これまでに行われたクローキングデバイスの最適設計の例として、Fujiiら³⁾を挙げることができる。Fujiiらは有限要素法を用い、2次元領域におけるTMモードに対するクローキングデバイスの最適設計を行なっている。しかしながら、有限要素法に基づく手法であるため、無限領域をPMLを用いて近似している。また、実際のクローキングデバイスの設計を視野に入れると、TMモードのみならず、TEモードも考慮する必要がある。TM、TEモードを同時に扱った最適化の例として、Andkjaerら⁴⁾を挙げることができるが、これも有限要素法を用いた手法である。

そこで、本論文ではTM、TEモードを同時に取り扱い、かつ無限領域を近似なく取り扱うことのできる境界要素法を用いたトポロジー最適化手法の開発を行う。特に、提案手法において最も重要であるトポロジー導関数について詳述し、その数値的検証を行う。

2 2次元電磁波動問題の基礎式

本節では、提案手法の準備のためにTEモードとTMモードにおける基礎式を確認する。支配方程式は式(1)であり、Fig. 1に示すような領域 Ω_1 、 Ω_2 に入射波 u^{in} が入射する場合を考える。

Fig. 1 領域と入射波

$$\Delta u(x) + k_i^2 u(x) = 0 \quad \text{in } \Omega_i \quad (1)$$

TMモードの場合、 u は磁場 H の x_3 方向成分である。 k_i は領域 Ω_i の波数であり、 $k_i = \omega \sqrt{\varepsilon_i \mu_i}$ と表される。また、 ε_i 、

μ_i はそれぞれ領域 Ω_i の誘電率、透磁率である。電場、磁場の接線成分の連続性から次の2式を得る。

$$\lim_{x \in \Omega_1 \rightarrow x \in \Gamma} u(x) = \lim_{x \in \Omega_2 \rightarrow x \in \Gamma} u(x) \quad \text{on } \Gamma \quad (2)$$

$$-\lim_{x \in \Omega_1 \rightarrow x \in \Gamma} \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial u(x)}{\partial n} = \lim_{x \in \Omega_2 \rightarrow x \in \Gamma} \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial u(x)}{\partial n} \quad \text{on } \Gamma \quad (3)$$

また、無限遠における放射条件を考慮する。以降、表記の簡単のために次の記号を導入する。

$$f^i \equiv \lim_{x \in D_i \rightarrow x \in \Gamma} f(x) \quad (4)$$

TEモードの基礎式は以下ようになる。TEモードの場合、 u は電場 E の x_3 方向成分である。

$$\begin{cases} \Delta u(x) + k_i^2 u(x) = 0 & \text{in } \Omega_i \\ u^1 = u^2 & \text{on } \Gamma \\ -\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^1 = \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 & \text{on } \Gamma \\ \text{Radiation Condition} \end{cases} \quad (5)$$

ここで、TMモードのとき、

$$\alpha_i = \frac{1}{\varepsilon_i}, \quad \beta_i = \omega^2 \mu_i \quad (6)$$

TEモードのとき、

$$\alpha_i = \frac{1}{\mu_i}, \quad \beta_i = \omega^2 \varepsilon_i \quad (7)$$

とおくと、TMモード、TEモードはまとめて次のように記述できる。

$$\begin{cases} \alpha_i \Delta u + \beta_i u = 0 & \text{in } \Omega_i \\ u^1 = u^2 & \text{on } \Gamma \\ -\alpha_1 q^1 = \alpha_2 q^2 & \text{on } \Gamma \\ \text{Radiation Condition} \end{cases} \quad (8)$$

ここに、 $q = \frac{\partial u}{\partial n}$ である。

3 トポロジー導関数の導出とその境界要素法による評価

ここで次のような目的関数を考える。

$$J = \int_{\Omega} f(u) H(\Omega'_1) d\Omega \quad (9)$$

ここに、 $H(\Omega'_1)$ はHeaviside関数である。

$$H(\Omega'_1) = \begin{cases} 1 & \text{if } \Omega'_1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (10)$$

また、 Ω'_1 は Ω_1 の部分集合である。

本論文におけるトポロジ導関数は、 Ω_i に誘電率 ε_j ($j \neq i$) をもつ微小円形誘電体が発生した際の、円の大きさに対する目的関数の変化量として定義される。そこで、微小円形誘電体が発生した際の目的関数 $J + \delta J$ を計算すると以下となる。

$$J + \delta J = \int_{\Omega} \left(f(u) + \operatorname{Re} \left[\frac{\partial f(u)}{\partial u_R} \delta u_R + \frac{\partial f(u)}{\partial u_I} \delta u_I \right] \right) H(\Omega'_1) d\Omega \quad (11)$$

ここに、 $u_R = \operatorname{Re}[u]$ 、 $u_I = \operatorname{Im}[u]$ である。式(9)と式(11)の差分をとると次式を得る。

$$\delta J = \operatorname{Re} \left[\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial u} \delta u H(\Omega'_1) d\Omega \right] \quad (12)$$

ここから、 δJ の評価を行うために数学的準備を行う。

Fig. 2 円形誘電体の湧き出し後

Fig. 2 に示すように、 Ω_1 内に誘電率 ε_2 の微小円形誘電体 Ω_r が湧き出すことによって領域 Ω_1 、 Ω_2 において

$$u \rightarrow u + \delta u, \quad q \rightarrow q + \delta q \quad (13)$$

となり、 Ω_r において

$$u \rightarrow \hat{u}, \quad q \rightarrow \hat{q} \quad (14)$$

となったとする。ここで、 δu 、 $\hat{u}$ 、 δq 、 $\hat{q}$ は次の境界値問題に支配される。

$$\alpha_1 \Delta \delta u + \beta_1 \delta u = 0 \quad \text{in } \Omega_1 \setminus \bar{\Omega}_r \quad (15)$$

$$\alpha_2 \Delta \delta u + \beta_2 \delta u = 0 \quad \text{in } \Omega_2 \quad (16)$$

$$\alpha_2 \Delta \hat{u} + \beta_2 \hat{u} = 0 \quad \text{in } \Omega_r \quad (17)$$

$$\delta u^1 = \delta u^2 \quad \text{on } \Gamma \quad (18)$$

$$-\alpha_1 \delta q^1 = \alpha_2 \delta q^2 \quad \text{on } \Gamma \quad (19)$$

$$u^1 + \delta u^1 = \hat{u}^r \quad \text{on } \Gamma_r \quad (20)$$

$$-\alpha_1 (q^1 + \delta q^1) = \alpha_2 \hat{q}^r \quad \text{on } \Gamma_r \quad (21)$$

ここに、 f^r は

$$f^r \equiv \lim_{x \in \Omega_r \rightarrow x \in \Gamma_r} f(x) \quad (22)$$

である。ここで、随伴問題を次のように定義する。

$$\alpha_1 \Delta \lambda + \beta_1 \lambda + \frac{\partial f}{\partial u} H(\Omega'_1) = 0 \quad \text{in } \Omega_1 \quad (23)$$

$$\alpha_2 \Delta \lambda + \beta_2 \lambda = 0 \quad \text{in } \Omega_2 \quad (24)$$

$$\lambda^1 = \lambda^2 \quad \text{on } \Gamma \quad (25)$$

$$-\alpha_1 \mu^1 = \alpha_2 \mu^2 \quad \text{on } \Gamma \quad (26)$$

Radiation Condition

ここに、 $\mu^i = \frac{\partial \lambda^i}{\partial n}$ ($i=1, 2, r$) である。ここで $\Omega_1 \setminus \bar{\Omega}_r$ 、 Ω_2 、 Ω_r における λ と δu に対する相反定理と境界値問題(15)~(21)の解を用いると式(12)の δJ は次のように評価できる。

$$\delta J = \operatorname{Re} \left[\int_{\Omega_r} ((\alpha_1 - \alpha_2) \lambda_{,j} \hat{u}_{,j} + (\beta_2 - \beta_1) \lambda \hat{u}) d\Omega \right] \quad (27)$$

ここで $r \rightarrow 0$ とすると次式を得る⁵⁾。

$$\delta J = \operatorname{Re} \left[\left\{ (\alpha_1 - \alpha_2) \lambda_{,j}^0 \times \frac{2\alpha}{\alpha_1 + \alpha_2} u_{,j}^0 + (\beta_2 - \beta_1) \lambda^0 u^0 \right\} \int_{\Omega_r} d\Omega \right] + o(r^2) \quad (28)$$

ここに、 $f^0 \equiv f(x^0)$ である。さて、トポロジ導関数 τ は次式で定義される。

$$\delta J = \tau V(r) + (V(r)) \quad (29)$$

ここに $V(r) = \pi r^2$ であり、式(28)より、 τ は以下のようになる。

$$\tau(x^0) = \operatorname{Re} \left[\frac{2\alpha(\alpha_1 - \alpha_2)}{\alpha_1 + \alpha_2} \lambda_{,j}^0 u_{,j}^0 + (\beta_2 - \beta_1) \lambda^0 u^0 \right] \quad (30)$$

本論文では $\mu = 1.0$ の場合を扱う。このとき、TMモードにおけるトポロジ導関数は、式(6)より次のようになる。

$$\tau(x^0) = \operatorname{Re} \left[\frac{2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{\varepsilon_1(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)} \lambda_{,j}^0 u_{,j}^0 \right] \quad (31)$$

同様に、TEモードにおけるトポロジ導関数は、式(7)より次のようになる。

$$\tau(x^0) = \operatorname{Re}[\omega^2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \lambda^0 u^0] \quad (32)$$

本論文では、式(31)、式(32)に表れる u^0 、 λ^0 、 $u_{,j}^0$ 、 $\lambda_{,j}^0$ を境界要素法を用いて数値的に評価する。用いる境界積分方程式はPMCHWT型のものであり、

$$u^{\text{in}}(x) = -(D^1 + D^2)[u](x) + (S^1 + S^2)[v](x) \quad (33)$$

$$v^{\text{in}}(x) = -(N^1 + N^2)[u](x) + (D^{T^1} + D^{T^2})[v](x) \quad (34)$$

と表される。ここに、 $v = -\alpha_1 \frac{\partial u(x)}{\partial n} = \alpha_2 \frac{\partial u(x)}{\partial n}$ である。また、 $S^i v$ 、 $D^i u$ 、 $D^{T^i} v$ 、 $N^i u$ 等は層ポテンシャルを表す。

4 多目的トポロジ最適化における目的関数とそのトポロジ導関数

TE、TMモードを同時に扱うため、例えば次のような目的関数を考えることができる。

$$J_w = w_e J_e + w_m J_m \quad (35)$$

ここに、 J_e 、 J_m はそれぞれTE、TMモードにおける目的関数を、 w_e 、 w_m はTE、TMモードに対する重みを表す。式(35)を用いると、 w_e 、 w_m を変更することでTMモードにおける磁場強度あるいはTEモードにおける電場強度を優先的に最小化することが可能となる。式(35)に対するトポロジ導関数は以下の式で表される。

$$\tau_w = w_e \tau_e + w_m \tau_m \quad (36)$$

また、 J_e と J_m のうち大きい方を優先的に最小化する場合に はKS Function を用いて次式のような目的関数を考える。

$$J_{\text{ks}} = \log(e^{w_e J_e} + e^{w_m J_m}) \quad (37)$$

式(37)に対するトポロジ導関数は次のようになる。

$$\tau_{\text{ks}} = \frac{\tau_e w_e e^{w_e J_e} + \tau_m w_m e^{w_m J_m}}{e^{w_e J_e} + e^{w_m J_m}} \quad (38)$$

5 トポロジー導関数の計算

ここから、前節に示したトポロジー導関数の計算と差分法の計算を行うことにより正しくトポロジー導関数の計算ができていないことを確認する。本節で考える問題はFig. 3に示された領域についてであり、 $x = 30$ におけるトポロジー導関数が正しく計算できているか検証を行った。入射波 u^{in} として x_1 軸正の向きに進む、周波数 $\omega = 0.50$ の平面波を与えた。観測点は $x = -35, y = 20, 22, 24, \dots, 40$ に配置した。目的関数は観測点での $f = \frac{1}{2}|u(x)|^2$ の値の和である。

Fig. 3 解析領域

領域 Ω_1 内の誘電率を $\varepsilon_2 = 1.0$ 、半径6.5の領域 Ω_2 内の誘電率を $\varepsilon_2 = 3.0$ 、重み $w_e = 1.0, w_m = 1.0$ とした時、式(36)で定義したトポロジー導関数 τ_w をプロットするとFig. 4のようになった。

Fig. 4 $x_1 = 30$ における τ_w と差分法の比較

Fig. 5 $x_1 = 30$ における τ_{ks} と差分法の比較

トポロジー導関数が正しく計算できていることを確認するためにを行った差分法により得られた値とは、半径 $r = 0.05$ の微小な円を配置した時の目的関数の変化を円の大きさで割った値である。Fig. 4から確認できるようにトポロジー導関数と差分法による値が一致した。このことから τ_w は正しく計算できていることがわかった。

同様の条件のもとでトポロジー導関数 τ_{ks} と差分法による計算を行った。Fig. 5がその結果である。Fig. 5から、トポロジー導関数 τ_{ks} についても正しく計算が行われていることが確認できた。

Fig. 4、Fig. 5の τ_w, τ_{ks} のグラフの形状はよく似ているが、これは、(1) τ_m の絶対値が τ_e に比べて大きく出たことにより式(36)のグラフは τ_m に大きく依存した結果になった、(2) 今回取り扱った問題に対しては目的関数は $J_e = 3.34394, J_m = 6.48393$ となり、 $e^{w_m J_m} \gg e^{w_e J_e}$ であることから、式(38)を用いた場合についても、より τ_m の値の影響を受けやすい状況になったため式(36)と式(38)の場合で似た形状のグラフを得る結果となったと考えられる。しかしながら、KS Functionを最小化すると、 J_e と J_m の大きい方が優先的に最小化されるため、複数回最適化を繰り返すことによってトポロジー導関数のグラフは異なる形状になるものと考えられる。

6 レベルセット法に基づくトポロジー最適化

3、4、5節で導出したトポロジー導関数を用いて重みを用いた場合とKS Functionを用いた場合における最適化を行った。得られた計算結果は当日発表する。

7 結言

2次元電磁波動問題において境界要素法を用いてTEモードとTMモードのトポロジー導関数の計算を行い、正しく計算できていることを確認した。また、TEモードとTMモードにおける電磁場強度を効率よく下げるために目的関数の評価にKS Functionを導入し、その場合についても正しく計算が行われていることを確認した。

謝辞 本研究は、科学研究費補助金(26870269)の補助を受けた。ここに謝意を表する。

参考文献

- 1) Masaki Otomori, Takayuki Yamada, Jacob Andkjaer, Kazuhiro Izui, Shinji Nishiwaki, and Nozomu Kogiso. Level set-based topology optimization for the design of an electromagnetic cloak with ferrite material. *Magnetics, IEEE Transactions on*, Vol. 49, No. 5, pp. 2081–2084, 2013.
- 2) Mohamed Farhat, Sebastien Guenneau, and Stefan Enoch. Ultrabroadband elastic cloaking in thin plates. *Physical review letters*, Vol. 103, No. 2, p. 024301, 2009.
- 3) Garuda Fujii, Hayato Watanabe, Takayuki Yamada, Tsuyoshi Ueta, and Mamoru Mizuno. Level set based topology optimization for optical cloaks. *Applied Physics Letters*, Vol. 102, No. 25, p. 251106, 2013.
- 4) Jacob Andkjær, N Asger Mortensen, and Ole Sigmund. Towards all-dielectric, polarization-independent optical cloaks. *Applied Physics Letters*, Vol. 100, No. 10, pp. 101106–101106, 2012.
- 5) A Carpio and ML Rapun. Solving inhomogeneous inverse problems by topological derivative methods. *Inverse Problems*, Vol. 24, No. 4, p. 045014, 2008.