波動問題の Burton-Miller 型積分方程式に関するアイソジオメトリック境界要素法の開発

A development of the isogeometric boundary element method based on Burton-Miller boundary integral equation for wave problems

○非 榛葉 祐太 (名古屋大学) 正 高橋 徹 (名古屋大学) 正 飯盛 浩司 (名古屋大学)
正 松本 敏郎 (名古屋大学) 非 林 慎一 (デンソー) 非 坂部 遥輝 (名古屋大学)

Yuta SHIMBA, Nagoya University, Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya, Aichi
Toru TAKAHASHI, Nagoya University, Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya, Aichi
Hiroshi ISAKARI, Nagoya University, Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya, Aichi
Toshiro MATSUMOTO, Nagoya University, Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya, Aichi
Sinichi HAYASHI, Denso, Showa-cho, Kariya, Aichi
Haruki SAKABE, Nagoya University, Furo-cho, Chikusa-ku, Nagoya, Aichi

Key word: Boundary element method, Isogeometric analysis, Burton-Miller formulation

1 緒言

近年、Hughesらによって提案されたアイソジオメトリック解析 (Isogeometric Analysis: IGA) ¹⁾ が有限要素法分野で注目されており、その派生としてアイソジオメトリック境界要素法 (Isogeometric Boundary Element Method: IGBEM) の研究も進められている。IGAは非一様有理B-spline (Non-Uniform Rational B-spline: NURBS) 関数を形状関数および補間関数とした体積/面積要素 (アイソジオメトリック要素と呼ばれる) を用いることを特徴とする。そのため、後続する数値解析の入力として、CADソフトウェアで作成した形状データを直接用いることができ、したがって高精度な解析を実現できる。

著者らのグループはBEMが得意とする波動問題に注目して、そのBEMにIGAを組み込むことに注力してきた^{2, 3, 4, 5)}。本研究では応用上重要である高周波問題に適応可能なIGBEMを構成する。高周波領域におけるIGBEMでは見かけの固有値問題⁷⁾が不可避の問題となるが、この問題の解決策としてBurtonとMillerによる方法⁶⁾が知られている。すなわち、通常の積分方程式 (Ordinary Boundary Integral Equation: OBIE) とそれを法線方向に微分して得られる超特異積分方程式 (Hypersingular BIE: HBIE) とを線形結合した境界積分方程式 (Burton-Miller型 BIE、あるいは、Combined BIE: CBIE) を用いればよい。このCBIEに基づいてIGBEMを構成するにあたり、OBIEに対するIGBEMについては本グループの先行研究³⁾の研究結果が流用できる。一方、HBIEに対するIGBEMについても先行研究^{4, 5)}の知見が有用であるが、HBIEの超特異積分はその特異性のために精度良く評価することは容易ではない。そこで本研究では、特異性のオーダーを下げるため、正則化されたHBIE (以下、RHBIEとよぶ) を用いる。ここで、RHBIEには境界変数 (後述の u) の接線方向微分が含まれるが、従来の多項式ベースの基底関数では接線方向微分を扱うことはIG要素と比較すると容易ではない。この意味でIGAは正則化と相性が良いと言える。

本研究の目的はCBIEに基づくIGBEMを開発することである。定式化においては、正則化による計算精度の向上を考慮する。また、帰着する連立方程式の解法として反復解法を用いる場合に懸念される反復回数の増大を招かないような工夫を行う。

2 境界積分方程式の導出

次式のようにあらわされるスカラー変数 u に関する2次元 Helmholtz 方程式の外部 Neumann 境界値問題を解く。

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}) + k^2 u(\mathbf{x}) = 0 \text{ for } \mathbf{x} \in \Omega \quad (1)$$

ここで、境界条件は $\mathbf{x} \in \Gamma$ のとき $\partial u(\mathbf{x})/\partial n = 0$ とし、入射波を $u^\infty(\mathbf{x})$ と定義する。対象領域 Ω の境界 Γ は至るところで滑らかであると仮定する。式(1)に基本解 $G(\mathbf{x}) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{x}|)$ (ここに、 $H_0^{(1)}$ は第1種0次Hankel関数) を掛けて、領域 Ω 上で積分し、Gaussの発散定理を用いて整理すると、次のOBIEが導出される。

$$\frac{1}{2}u(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} \frac{\partial G(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{\partial n_y} u(\mathbf{y}) ds_y = u^\infty(\mathbf{x}) \quad (2)$$

ここに、 n_y は境界上の点 $\mathbf{y}$ における外向き単位法線ベクトルである。

次に、式(2)を $\mathbf{x}$ の法線方向に微分し整理すると、次のHBIEが導出される。

$$\oint_{\Gamma} \frac{\partial^2 G(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{\partial n_x \partial n_y} u(\mathbf{y}) ds_y = \frac{\partial u^\infty(\mathbf{x})}{\partial n_x} \text{ for } \mathbf{x} \in \Gamma \quad (3)$$

ここに、 $\oint$ を重ねた積分記号は有限部分をあらわす。ここで、(3)の左辺の超特異積分に対して恒等式 $\partial n_x \partial n_y = -\partial s_x \partial s_y$ を用いて部分積分を実行する (正則化) と、次のRHBIEが求められる⁶⁾。

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_y k^2 G(\mathbf{x}-\mathbf{y}) u(\mathbf{y}) ds_y + \oint_{\Gamma} \frac{\partial G(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{\partial s_x} \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial s_y} ds_y \\ = \frac{\partial u^\infty(\mathbf{x})}{\partial n_x} \text{ for } \mathbf{x} \in \Gamma \end{aligned} \quad (4)$$

式(4)の特異積分は(3)と比べて特異性が、有限部分のオーダーからCauchyの主値のオーダーまで下がっている。本研究ではOBIEとRHBIEを結合定数 α を用いて線型結合したCBIE

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} \frac{\partial G(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{\partial n_y} u(\mathbf{y}) ds_y \\ + \alpha \left\{ k^2 \int_{\Gamma} \mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_y G(\mathbf{x}-\mathbf{y}) u(\mathbf{y}) ds_y \right. \\ \left. + \oint_{\Gamma} \frac{\partial G(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{\partial s_x} \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial s_y} ds_y \right\} \\ = u^\infty(\mathbf{x}) + \alpha \frac{\partial u^\infty(\mathbf{x})}{\partial n_x} \text{ for } \mathbf{x} \in \Gamma \end{aligned} \quad (5)$$

を用いる。BurtonとMillerは $\text{Im}[\alpha] \neq 0$ の場合に、CBIEが外部問題において一意の解を持つこと（すなわち、見掛けの固有値問題が回避できること）を証明している⁶⁾。

3 境界積分方程式の離散化

本研究では、NURBSの一種である一様B-spline関数を用いて式(5)を離散化する。

3.1 境界 Γ と境界変数 u の離散化²⁾

2節で仮定した境界 Γ 上での任意の点 y を次のように表す。

$$y(t) = \sum_{j=k-p}^k b_{j,p}(t) P_j \% (n-p) \quad \text{for } t_{k+p} \leq t \leq t_{k+p+1} \quad (6)$$

ここに、 t は曲線のパラメータ、 P_j は制御点、 $b_{j,p}(t)$ は p 次のB-spline基底関数である。 $\%$ は剰余記号であり、 $y(t)$ が Γ 上で周期的であることを反映している。 t_j は $t_j := \frac{j}{n+p}$ ($0 \leq j \leq n+p$)と定義した一様ノット、 $\Gamma_k := \{y(t) \in \Gamma \mid t_{k+p} \leq t < t_{k+p+1}\}$ と定義したIG要素である。

境界変数 u についても一様B-spline基底関数を用いて次のように補間する。

$$u(t) = \sum_{j=k-p}^k b_{j,p}(t) u_j \% (n-p) \quad \text{for } t_{k+p} \leq t \leq t_{k+p+1} \quad (7)$$

ここに、 u_j は制御変数と呼ばれ、求めるべき未知量である。

Fig. 1 Discretization of Γ in IGBEM.

3.2 Burton-Miller型積分方程式の離散化

式(6)と(7)を用いて(5)のCBIEを離散化をする。式(5)の二重層ポテンシャルに関する積分は次であらわされる。

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_k} \frac{\partial G(x_i - y)}{\partial n_y} u(y) ds_y \\ &= \frac{ik}{4} \int_{t_{k+p}}^{t_{k+p+1}} H_1^{(1)}(kr) \frac{r \cdot n^y}{r} \sum_{j=k-p}^k b_{j,p}(t) u_j J(t) dt \quad (8) \end{aligned}$$

ここに $r := x - y$ 、 $r := |r|$ 、 $J(t) = \sqrt{y_1'(t)^2 + y_2'(t)^2}$ はヤコビアン、 $'$ は t による微分である。選点 x_i の定義については3.4節で述べる。以上より、離散化された積分方程式は、未知数 u_j に関する $n-p$ 元連立一次方程式に帰着し、次のように行列形式であらわされる。

$$Ax = b \quad (9)$$

ここに、

$$\begin{aligned} x &= [u_0, \dots, u_{n-p-1}]^T \in \mathbb{R}^{n-p} \\ b &= [u^\infty(x_0), \dots, u^\infty(x_{n-p-1})]^T \in \mathbb{R}^{n-p} \end{aligned}$$

であり、 A は係数行列であり、一般に非対称密行列である。

3.3 境界積分の評価

離散化された境界積分について、特異でない場合はGauss-Legendre積分公式を用いて数値的に計算する。一方、 $x = y$ の場合を含む特異積分では、坂部ら⁵⁾にならない G を正則な部分と特異な部分に分解して個々に積分する⁷⁾。

3.4 選点の定義

式(9)を反復解法によって解く場合、収束に至るまでの反復回数は係数行列 A の持つ様々な線形代数的性質に影響される。中でも A の優対角性（ここでは対角成分が非対角成分よりも大きいという意味）は重要である。この観点より、選点を次のように取ることでIGBEMの係数行列は優対角となる。

$$x_j := \begin{cases} y \left(\frac{t_{j+\frac{p}{2}} + t_{j+\frac{p}{2}+1}}{2} \right) & (p \text{ が偶数}) \\ y \left(t_{j+\frac{p+1}{2}} \right) & (p \text{ が奇数}) \end{cases} \quad (10)$$

理由を述べる。(5)の二重層ポテンシャルに関する(9)の係数行列 A の第 i 行第 j 列の要素は、

$$A_{ij} = \sum_{k=j-p}^j \int_{\Gamma_k} \frac{\partial G(x_i - y)}{\partial n_y} b_{j,p}(t) ds \quad (11)$$

である。基本解は $r = |x_i - y|$ が小さいほど値が大きくなるので、選点が積分区間上に配置される場合に(11)の値が大きくなる。例えば、 $p=2$ とすると(11)の右辺は Γ_{j-p} 、 Γ_{j-1} 、 Γ_j 上の積分にあらわされるが、 $b_{j,p}$ の大きさを考えると、寄与が大きい積分区間は Γ_{j-1} である。従って、(10)の $p=2$ の場合つまり、 $x_j := y \left(\frac{t_{j+1} + t_{j+2}}{2} \right)$ のように Γ_{j-1} 上に選点 x_j を配置させることで、(11)は $i=j$ で値が大きくなる。(5)について、二重層以外の積分核 $n_x \cdot n_y G(x - y) u(y)$ 、 $\frac{\partial G(x - y)}{\partial s_x}$ についても r が小さいほど値が大きくなるので、同様に選点を定義することで、行列 A は優対角となる。なお、選点は p が偶数ならばノットとノットの間、奇数ならばノット上に配置される。

4 数値解析

第2、3節で定式化したCBIEに基づくIGBEMについての数値解析結果を示す。以下では、式(1)で表される外部Neumann境界値問題の一つとして、中心が原点である単位円を境界 Γ とし、 $u^\infty(x) = e^{ikx_2}$ を入射波とする問題を解く。この問題は解析的に解くことができ、その理論解を $u^{\text{exact}}(x)$ と表す。なお、IGBEMにより得られる数値解 $u(x_j)$ の精度は、理論解 $u^{\text{exact}}(x_j)$ との相対 ℓ_2 誤差 E によって評価する。

$$E := \sqrt{\frac{\sum_j |u(x_j) - u^{\text{exact}}(x_j)|^2}{\sum_j |u^{\text{exact}}(x_j)|^2}}$$

4.1 計算精度の検証

本IGBEMにおいて、B-spline基底関数の次数 p は2または3、Gauss-Legendreの数値積分の積分点数は4、そして、結合定数は $\alpha = i/k$ とした。ここで、波数 k は10とした。なお、本節では式(9)を直接解法(LU分解)で解く。

Fig. 2に、制御点数 n に対して相対 ℓ_2 誤差 E をプロットした。誤差は n^{-3} のレートで減少している。また、次数 p の増加と共に精度が良くなっていることが分かる。

4.2 見掛けの固有値問題に関する検証

波数 k を0.001から6の間で0.001刻みで変化させ、各 k に対するOBIE、RHBIEおよびCBIEに基づく各IGBEMの計算精度を調べた。ここで、 $n=128$ 、 $p=2$ とした。結

Fig. 2 Error of numerical solution for IGBEM based on BMBIE

果をFig. 3に示す。橙色と水色の縦線が指す k は、それぞれOBIEとRHBIEの見掛けの固有値に対応する波数である。OBIEとRHBIEは見掛けの固有値付近で誤差が増大しているが、CBIEでは誤差の急増は見受けられず、見掛けの固有値が回避できていることが確認できた。なお、誤差が全体的に k とともに増大しているのは、制御点数 n を固定しているからである。また、 $p=3$ の場合についても同様の結果が得られた。

Fig. 3 Error of the three IGBEMs using $p=2$.

4.3 反復回数の検証

3.4節で述べた選点の選択と反復解法の収束性について検証した。ここでは、CBIEに基づくIGBEM ($p=2$ とする)を用いる。式(10)に基づいて選点を定めた場合をcase 1と呼び、比較として、素朴に選点番号をIG要素番号と同じとした場合、つまり、 $x_j = y \left(\frac{t_{j+p} + t_{j+p+1}}{2} \right)$ とした場合をcase 2と呼ぶ。波数は10とした。反復解法としてはGMRESを用い、その収束判定条件は平均相対残差 $\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \{(R^{i-k-1} - R^{i-k})/R^{i-k}\}$ が 10^{-2} よりも小さくなったときとした。ここに、 R^i は i 回目の反復での(9)の残差であり、 $m=3$ とした。

Fig. 4は制御点数 n に対する反復回数を示す。case 1は n に対する反復回数の増加率が高く、大規模な解析には向いていないことが分かる。これより、係数行列の優対角性を鑑みて選点を適切に選ぶことが重要であることが確認できた。なお、case 1およびcase 2の反復解の計算精度は、直接解法のそれ (Fig. 2の $p=2$ の結果) とほぼ同じであった。

Fig. 4 Number of iterations for case 1 and case 2.

5 結言

二次元Helmholtz方程式のCBIEに基づくIGBEMの開発を行った。そして、HBIEやOBIEに基づくIGBEMで確認された見かけの固有値問題を、CBIEに基づくIGBEMで回避できることを確認した。また反復解法におけるIGBEMにおいて、係数行列 A の生成方法によっては反復回数の増大を招いてしまう場合があるため、係数行列の生成には細心の注意を払う必要があることを確認した。

今後の課題としては、高速多重極法の適用、PMCHWT公式を用いたtransmission問題への応用、3次元問題への拡張などが挙げられる。

参考文献

- 1) T.J.R. Hughes, J.A. Cottrell: Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol.194, pp.4135-4195, 2005.
- 2) T. Takahashi, T. Matsumoto: An application of fast multipole method to isogeometric boundary element method for Laplace equation in two dimensions, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol.36, pp.1766-1775, 2012.
- 3) 林慎一: 非一様B-Splineに基づくアイソジオメトリック要素を用いた2次元Helmholtz方程式に対する高速多重極境界要素法, 日本機械学会計算力学講演会論文集, Vol.26, 2013.
- 4) 高橋徹: 2次元波動問題に対するアイソジオメトリック境界要素法の高度化, 計算工学講演会論文集, Vol.19, 2014(CDROM).
- 5) 坂部遥輝: 二次元ポテンシャル問題における超特異積分方程式に基づくアイソジオメトリック境界要素法の開発, 名古屋大学工学部機械航空工学科電子機械コース, 卒業論文, 2013.
- 6) A.J. Burton, G.F. Miller: The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary-value problems, *Proc. Roy. Soc. Lond. A.*, Vol.275, pp.201-210, 1971.
- 7) 小林昭一(編著): 波動解析と境界要素法, 京都大学学術出版会, 2000.