9.0.1 2次元評価関数を有する離散型線形離散値系の二手法による非劣解求解の比較

Comparison of two methods on noninferior solutions

in a quantized linear discrete system with two dimensional performance functions

正宗像 経博

学 ○井上 聡

(広島国際学院大学)

Tsunehiro MUNAKATA and ○Satoshi INOUE

Hiroshima Kokusai Gakuin University

Key words: noninferior Solutions, Quantized linear discrete system,
Two dimensional performance functions,
Lump method, Recursive method.

1. 緒言

離散時間線形離散値系で、2次元評価関数を有する場合の非劣解求解は、最終時刻 k での有限個の離散状態量として、2次元の評価量全部が与えられたとき、それらから非劣解を求める方法(一括法)は過去に提案されている。今般、有限個の評価量について、始めに1個、次にまた1個と1個ずつ与えられ有限個を与え終わったときに非劣解が求まる方法(逐次型)が提案でき、それら二手法の比較を行った。

2. 2次元評価関数の非劣解の逐次的求解

2.1 制御問題の定式化

状態方程式:

$$x(i+1) - x(i) = A(i)x(i) + g(i, u(i))$$

$$i=0, 1, 2, \dots, k-1 \quad (1)$$

$$x \in R^{n+1}, u \in Q \subset R^r, A \in R^{(n+1) \times (n+1)}, g \in R^{n+1},$$

 k : ある正の整数, R : 実数空間, Q : 有限有界な要素からなる許容離散値制御ベクトルの集合。(i) $g(i, u)$: 全ての i について u に関し有限関数。(ii) $I + A(i)$: 全ての i について正則行列。ただし I は単位行列。以上を仮定する。初期値: $x(0) = x_0$ は所与。

〔制御問題〕

初期値 x_0 に対し、式(1)を満たし、

$$x(k) \in R^{(n+1)} \quad (\text{終端自由}) \quad (2)$$

かつ2次元ベクトル値評価関数

$$\begin{bmatrix} x^n(k) \\ x^{n+1}(k) \end{bmatrix} : \text{最大} \quad (3)$$

とする許容離散値最適制御ベクトルの列

 $\{\hat{u}(i)\}$, $i=0, 1, 2, \dots, k-1$ を求める。

2.2 ベクトル値評価関数の解に関する定義

ある $x \in R^{n+1}$ が与えられたとき、記号を次のように与えることにする。

● Σ : R^{n+1} 状態空間。⊙ W : Σ の部分空間で到達可能点の集合。⊙ $\Sigma_s(x)$: x より評価関数の値が大きい点の作る空間。⊙ $\Sigma_{\leq}(x)$: x より評価関数の値が小さいか等しい点の作る空間。● $\Sigma_{\sim}(x)$: x と比較不可能な点の作る空間。〔定義1〕 $W \subset \Sigma_{\leq}(x)$ ならば、 $x \in W$ を完全最適解という。

〔定義2〕 $\Sigma_s(x) \cap W = \emptyset$ ならば、 $x \in W$ を非劣解という。ただし x は W の凸包点である。なお $\emptyset$ は空集合を表わす。以上、二定義を与える。

x が W の凸包点とは、 x を含む離散点の有限な集合 W に凸包(convex-hull)をとったとき、 x がその境界点になっているものを言うことにする。

2.3 逐次比較型アルゴリズム

Fig.1 The first point

図-1に示す様な最初の点 A が、 Y 座標上に与えられたとする。この点 A は他に比較する点がないので N 点と見なす。次に点 B を与える。点 A , B の2点が N 点群と判断された後(図-2-a, 図-2-b)、次に加わる新点 C に対して、さらに点 D 以下が加わる前に次の作業を行う。

- 図-3-bの様な時、点 C より先 B の様な点が塗りつぶされた範囲があったとすると、 B 点が最適域に多々作ってしまうので、そのような点を N 点群の中から見つけだすために、対象となる点を B と C の作る直線より上か、下かを調べる必要がある。(しかし、この様な状況は今の時点では考えない。)
- N 点群の中で直線 AB に最も近い点2つ(もちろん1つの時もある)に、 X 軸から直する直線を引き、つまり、その直線の方程式を求める。

Fig.2-a Point-B

Fig.2-b Lines of A & B made for Compare to new point

3. NI点どうしを結ぶ直線（新点を半断するための規準線、図-3-b。）は“NI点と他のNI点とが作る直線はその点からもっとも近い2つのNI点（その点の両隣1つずつ）を通らなければならない”という条件で、隣接し合うNI点それぞれの直線を求める。

ここでNI点が増えた時、どのようにして新点が完全最適解（S）、非劣解（NI）、劣解（I）となるかを

判断するためには、現時点での全てのNI点群に対して、新点が優（S）、同等範囲（NI）のどちらの範囲に入るかを調べる。そして新点がNI点の優範囲に入るとNI点は新点に替われ、同等範囲に入り込まただけのNI点は新点との比較は出来ず、新点がNI点群に追加されるだけである。また、全NI点の劣範囲に位置した新点は削除される。

2. 4 数値例

ここで数値例として2つのサンプルを示す。

$i=0, 1, \dots, 3$ に対し、(1) 状態方程式：

サンプル-I

$$\begin{bmatrix} x_1(i+1) \\ x_2(i+1) \\ x_3(i+1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1(i) \\ x_2(i) \\ x_3(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(i) \\ x_2(i) \\ x_3(i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2u_1(i) + u_2(i) \\ u_1(i) + 2u_2(i) + u_3(i) \\ u_2(i) + u_3(i) \end{bmatrix}$$

サンプル-II

$$\begin{bmatrix} x_1(i+1) \\ x_2(i+1) \\ x_3(i+1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1(i) \\ x_2(i) \\ x_3(i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(i) \\ x_2(i) \\ x_3(i) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1(i) + u_2(i) - u_3(i) \\ u_1(i) - u_2(i) \\ 2u_2(i) - u_3(i) \end{bmatrix}$$

計算結果の各81点をプロットしたものを以下に示す。

以上のグラフより、グラフ上（グラフの第1象限）の非劣解は、2つのサンプルそれぞれにおいて、

サンプル-I

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 9 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

サンプル-II

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 9 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 4 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

と、それぞれ2個、3個と非劣解が求まる。

これら2つのサンプルにおいて求められた非劣解は、一括型・逐次比較型とも同一である。

3. 結語

本稿では2. 1で与えた二次元ベクトル値評価関数を有する離散値制御問題を解く時に避けられない非劣解について、その定義および逐次的な求解法を述べた。一括法の場合と比較して少々複雑だが、逐次比較によるメモリーを始めとする処理の簡便さは指摘できる。

なお、本制御問題の後半の部分は多目的整数計画問題にも見られることである。しかし本制御問題では、この $x(k)$ をもとにして $i=0, 1, 2, \dots, k-1$ の $\hat{u}(i)$ と $i=1, 2, 3, \dots, k$ の $x(i)$ とを各時刻ごとに順時間方向に動的に探索する点がそれらとは異なる。

また、非劣解を求めるときのデータの量がごく小規模な場合は、これら逐次比較型と一括型の2つの手法の差はあまり歴然とはしないが、しかしそれが莫大なとき、逐次比較型は一括型より使用メモリー領域の縮小化も考えられる。

参 考 文 献

- (1) Halkin, H.: "Optimal Control for Systems Described by Difference Equations", Academic Press, pp.173-196 (1964).
- (2) 宗鑑経専 著: "離散時間型量子的最適制御システムに関する研究とその応用", 慶應義塾大学博士課程論文 (1977).
- (3) 宗鑑経専 著: "二次元ベクトル値評価関数を有するHalkinタイプの量子的線形制御問題の非劣解について", 電子通信学会論文誌 '84 / 9 Vol. J67-A No. 9.
- (4) 宗鑑経専 著: "二評価関数を有するHalkinタイプの制御問題の一最適値数値解", システムと制御 第28巻 第11号 p. 679~686 (1984).
- (5) 宗鑑経専 井上聡 共著: "2次元評価関数の非劣解逐次求解に関する考察", 第8回計測制御学会中国支部学術講演会 (1999).