712 数理計画問題の最適解に対するファジィ的感度性についての考察

Fuzzy Sensitivity on the Optimal Solutions of
the Mathematical Programming Problem

○正 宗 像 経 博 学 吉 松 志 郎 学 室 田 友 昭 (広島国際学院大)

Tsunchiro MUNAKATA, Shirou YOSHIMATSU and Tomoaki MUROTA

Hiroshima Kokusai-Gakuin University, 6-20-1, Nakano, Aki-ku, Hiroshima,

739-0321

Key Words: Mathematical linear programming problem, optimal solution, simplex method, sensitivity analysis, Fuzzy programming problem, membership functions of restrictions and objective function

1. はじめに

ある与えられた制約条件の下で、一つの目的関数を最大化または最小化する方策が、数理計画問題の最適方策であるが、制約条件のパラメータ数値が多少変化したときの最適方策の変化の度合の分析を感度分析と言う。本報では、近年の我が国研究室でのファジィ理論及び同応用事例^{1)~3)}を踏まえ、制約条件および目的関数のパラメータがある種のファジィ(あいまい)的な変化をしたときの最適方策の変化について、数理計画的求解を行い、最適方策のファジィ的感度性について、数値例による考察を行った所を報告する。

2. ファジィ状況下での線形計画問題の最適方策と感度性

2.1 ファジィ状況下での最適化⁴⁾

Bellman & Zadeh⁵⁾は、代替案の集合 X 上にファジィ目的とファジィ制約が与えられたときの最適化に関しては、ファジィ目的(O)とファジィ制約(C)は、それぞれのメンバーシップ関数; $\mu_O: X \rightarrow [0, 1]$ $\mu_C: X \rightarrow [0, 1]$ により、特徴付けられる代替案の集合 X 上のファジィ集合とし、 O と C の統合について、これらを同時に満たすことを考え、ファジィ意思決定(D)(最適化)は、 O と C との共通集合として、 $D = O \cap C$ 、 $\mu_D(x) = \min(\mu_O(x), \mu_C(x))$ と与えている。

ファジィ意思決定(D)(最適化)は、最大化決定法が提案されており、 $\mu_D(x^*) = \max \mu_D(x)$ with $x \in X$ となるような x^* を求める訳である。

2.2 ファジィ線形計画問題

n 次元ベクトル c, x , m 次元ベクトル b , $m \times n$ 行列 A と与えたとき、

$$\begin{aligned} \min \quad & z = c \cdot x \\ \text{s.t.} \quad & A \cdot x \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

なる数理計画問題に対し、Zimmermann⁶⁾は、ファジィ目的とファジィ制約を持つファジィ線形計画問題として、

$$c \cdot x \leq z_0$$

$$A \cdot x \leq b$$

$$x \geq 0$$

とし、目標値 $c \cdot x$ は大体 z_0 以下にし、制約 $A \cdot x$ も大体 b 以下にしたいと言う形の問題を与えている。

従って、

$$B \cdot x \leq b'$$

$$x \geq 0$$

$$\text{なお, } B = \begin{bmatrix} c \\ A \end{bmatrix}, \quad b' = \begin{bmatrix} z_0 \\ b \end{bmatrix}.$$

とし、ファジィ不等式 $B \cdot x \leq b'$ の i 番目の不等式:

$$(B \cdot x)_i \leq b'_i$$

$i = 0, 1, \dots, m$ に対して、

線形タイプのメンバーシップ関数: $\mu_i((B \cdot x)_i)$ を、

$$\mu_i((B \cdot x)_i) = \begin{cases} 1 & ; ((B \cdot x)_i) \leq b'_i \text{ のとき} \\ 1 - ((B \cdot x)_i - b'_i)/d_i & ; b'_i \leq ((B \cdot x)_i) \leq b'_i + d_i \text{ のとき} \\ 0 & ; ((B \cdot x)_i) \geq b'_i + d_i \text{ のとき} \end{cases}$$

と与えて意思決定者のあいまい性を表した。

なお、 d_i の値は意思決定者が主観的に設定するものとする。

これに、Bellman & Zadeh の最大化決定を採用すると、与えられた線形計画問題は、

$$\mu_D(x^*) = \max_{x \geq 0} \min_{0 \leq i \leq m} \{(B \cdot x)_i\}$$

を満たす x^* を求める問題となり、最小のメンバーシップ関数値を最大にするような $x^* \geq 0$ を求める問題となる。

従って、

$$b^*_i = b'_i/d_i, \quad (B' \cdot x)_i = (B \cdot x)_i/d_i$$

とおくと、(12)は、

$$\mu_D(x^*) = \max_{x \geq 0} \min_{0 \leq i \leq m} \{1 + b^*_i - (B' \cdot x)_i\}$$

となり、この問題は、次の変形的な数理計画問題:

$$\begin{aligned} \max \quad & \lambda \\ \text{s.t.} \quad & \lambda \leq 1 + b^*_i - (B' \cdot x)_i \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

に変換できる。

2.3 簡単な生産・販売計画の問題とその結果⁷⁾

株式会社K産業は、小規模ながら、あるインテリア商品の分野で根強いマーケットを持つ専門メーカーであり、何種類かの製品を百貨店や専門店を通じて市場

に出している。同社では今、次の四半期の生産計画を検討中であるが、主要製品のQおよびRの生産・販売量をどうするかが問題になっている。両製品の収益・費用、その他の条件は表のように整理されている。経営者のK氏は、これらの製品に関する生産・販売上の基本ポリシーとして、次の三種の目標を追及したいと考えている。

目標1. この計画期間の利益を出来るだけ大きくしたい。

目標2. 製品Qの生産・販売量をなるべく大きくして、市場地位を高めたい。

目標3. 製品Rの生産・販売量もなるべく大きくしたい。

	製品 Q	製品 R
生産・販売量	x_1 ユース	x_2 ユース
販売単価	9万円	6万円
単位当りの変動費	3万円	2万円
工程1の必要時間/ユース	2時間	3時間
工程2の必要時間/ユース	6時間	3時間
工程1の実働可能延べ時間(1期当り): 900 時間		
工程2の実働可能延べ時間(1期当り): 1800 時間		
固定費(1期当り): 800万円		

Table Conditions of the production and sale

経営者のK氏は、製品Q, Rの販売量について、特別の要求は付けず、一計画期間の利益の最大化を考えているとして、生産能力の制約を満たしながら利益を最大にするとすると、次のように定式化できる。

目的関数(粗利益): $G = -6x_1 + -4x_2$ (万円); $\min$

制約式: (工程1 (P1)) $2x_1 + 3x_2 \leq 900$ (時間)

(工程2 (P2)) $6x_1 + 3x_2 \leq 1800$ (時間)

(非負条件) $x_1, x_2 \geq 0$ 。

LP解法によれば、 $x_1^* = 225$, $x_2^* = 150$, $G^* = 1950$, 純利益: 1150万円である。

Fig. Profit maximization within the feasible region

2.4 ファジィ線形計画問題とその結果について

本報の簡単な生産・販売計画の問題を基にファジィ線形計画問題を与える。

目的関数について: 1950を挟んで幅 d_G を与え、 $\mu = 0, 1$ に対して、線形関係を与える。

制約式について: P1 に関し、幅 d_{P1} を与え、 $\mu = 0, 1$ に対して、線形関係を与える。P2 に関し、幅 d_{P2} を与え、 $\mu = 0, 1$ に対して、線形関係を与える。従って、

P1に関する制約式:

$$(2/d_{P1})x_1 + (3/d_{P1})x_2 + \lambda \leq 1 + (900/d_{P1})$$

P2に関する制約式:

$$(6/d_{P2})x_1 + (3/d_{P2})x_2 + \lambda \leq 1 + (1800/d_{P2})$$

目的関数に関する式:

$$(6/d_G)x_1 + (4/d_G)x_2 - \lambda \geq -1 + (1950 + (d_G/2)),$$

となる。従って、 x_1, x_2 の非負条件、上3式を制約条件とし、 $\max \lambda$ とする線形計画問題に変換できる。

例えば、 $d_{P1} = 90$, $d_{P2} = 180$, $d_G = 200$ とすると、 $x_1^* = 246.154$, $x_2^* = 169.231$, $G^* = 2038.23$ と求まり、 G (粗利益)について、4.5%増、純利益では、7.7%増となる。なお、これらは、従来の線形計画問題の実行可能解からすれば、そうではない解である。

本報問題の数値求解には、刀根 薫 先生の講義及び文献⁸⁾でのプログラム及び同プログラムを我方で修正、作り直したプログラムを用いた。

3. おわりに

ファジィ的最適化の一つとして、目的関数と制約式との両方がファジィ化されたファジィ線形計画問題として与えられた、生産・販売計画の問題に対して、最適解を求解し、解の比較、感度考察を行った。

最適化に関するファジィ化検討は、本報の事項のみならず、興味深いものがあるようである。

参考文献

- 1) T. Munakata et. al.: A study on the comparative methods of a defuzzification in the fuzzy problem simulated car driving in the high way, Proc. of the 1990 KACC, pp.1383-1386, Korean Association of Automatic Control
- 2) T. Munakata & H. Kodama, A study on the evaluations of control results in the fuzzy problem simulated car driving in the high way, IMEKO World Congress, Digest Part III, pp.281-282, 1991
- 3) 宗像、澤部、ファジィ数値計画法による最適解のファジィ性と数値計画法の感度性、Vol.26, pp.55-62, 広島電機大学・広島自動車工業短期大学研究報告、1993年
- 4) 村上 周太監修、ファジィシステム演習問題集、工業調査会、1992年
- 5) R.E. Bellman & L.A. Zadeh, Decision making in a fuzzy environment, Management Science, Vol.17, 1970
- 6) H.J. Zimmermann, Description and optimization of fuzzy systems, Int. J. of General Systems, Vol.12, 1976
- 7) 伏見、福川、山口、経営の多目標計画、森北出版、1996年
- 8) 刀根 薫、BASIC, 培風館、1982年。