106 柔軟多層板の大たわみ変形解析

Theoretical Analysis of Large Deformations in a Flexible Multi-Layered Plate

正 大槻 敦巳 (名城大理工) 〇学 大森 幸一 (名城大理工 院)

Atsumi OHTSUKI, Meijo University, 1-chome 501-banchi, Shiogamaguchi, Tempaku-ku, Nagoya, Aichi 468-8502, Japan

Kouichi OHMORI, Graduate student of Meijo University

Key Words: Elasticity, Large Deflection, Non-linear Problem, Elastica Problem, Multi-Layered Plate

1. 緒言

高分子材料や金属系の薄板など極めて大きくたわみやすい材料がばね用部材あるいは機械の構造部材として広く用いられている。これらは単体としてだけでなく、近年は機能向上のため多層化して使用されることも多い。そこで本論文では、こうした可撓性の大きい多層材料の大変形特性について自由端に横荷重を受ける片持はりを例にとり非線形解析したもので、だ円積分を用いた解析解を与えると同時に、解析理論の有効性を実験で確認した。なお、単層片持はりの大変形については、幾つかの解析が既に成されている^{(1)~(3)}。

ところで、多層はりは均質等方体を組合わせはりで、曲げを受けた際は相互に滑ることなく一つのはりとして変形し、Euler-Bernoulli の仮定が成り立つものとする。また、理論の適応範囲は弾性領域とし、部材は不伸長で、層厚さは長さに対し十分に薄く、せん断力の影響、ポアソン効果などは考慮しないこととした。

2. 基礎理論

図1に示すように、はりの一端を座標原点 A とし、自由端に鉛直荷重 P を受ける全長 L の多層片持はり先端における水平方向変位を λ 、垂直方向変位を δ 、先端たわみ角を θ_B とする。任意点 Q の水平距離を x 、垂直たわみを y 、たわみ角を θ 、たわみ曲線の円弧長さを s 、曲率半径を R とし、多層はりを構成する各部材要素のヤング率を $E_1 \sim E_n$ 、中立軸に関する各部材要素の断面二次モーメントを $I_1 \sim I_n$ とする。特に、図2は2層はり($n=2$)を示したもので、断面に新たに y - z 軸を設定した。 z 軸から中立軸までの距離を $\bar{y}$ 、中立軸から任意軸までの距離を y 、 z 軸から任意軸までの距離を y_z とする。曲げ変形において、中立軸から各部材要素までの距離を $y_1 \sim y_n$ とすると、中立軸に関する曲率の関係から

$$\frac{1}{R} = \frac{\sigma_1}{E_1 y_1} = \frac{\sigma_2}{E_2 y_2} = \dots = \frac{\sigma_i}{E_i y_i} = \dots = \frac{\sigma_n}{E_n y_n} \quad (1)$$

断面に作用する曲げモーメント M は、 A_i を各部材要素の断面積とすれば、式(1)より

Fig.1 Schematic configuration of flexible multi-layered plate subjected to a tip load.

$$M = \sum_{i=1}^n \left(\frac{E_i}{R} \int_A y_i^2 dA \right) = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^n (E_i I_i) \quad (2)$$

したがって、たわみの関係式として次式(3)が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R} &= -\frac{d\theta}{ds} = \frac{M}{\sum_{i=1}^n (E_i I_i)} \\ dy &= ds \cdot \sin \theta, \quad dx = ds \cdot \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

任意水平距離 x に作用する曲げモーメント M は

$$M = P \cdot x + M_A \quad (4)$$

ここで、次の無次元量

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{x}{L}, \eta = \frac{y}{L}, \zeta = \frac{s}{L}, \gamma = \frac{PL^2}{\sum_{i=1}^n (E_i I_i)}, \alpha = \frac{M_A L}{\sum_{i=1}^n (E_i I_i)} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

を導入すれば、最終的に、たわみの基礎式は

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = \pm \sqrt{2\gamma(\sin \theta_B - \sin \theta)} \quad (6)$$

なお、式(6)右辺の正負符号については、無次元円弧長 ζ が増すにしたがいたわみ角 θ の増加するので、ここでは常に正を採る。さらに、上式(6)において

$$\left. \begin{aligned} \sin \theta_B &= 2k^2 - 1 \\ \sin \theta &= 2k^2 \cdot \sin^2 \phi - 1 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

とおき、 θ について新角度変数 ϕ に変換し、整理すると

$$d\zeta = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \cdot \sin^2 \phi}} \cdot d\phi \quad (8)$$

$$d\eta = \left\{ \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{1-k^2 \cdot \sin^2 \phi} - \frac{1}{\sqrt{\gamma} \cdot \sqrt{1-k^2 \cdot \sin^2 \phi}} \right\} d\phi \quad (9)$$

$$d\xi = \frac{2k}{\sqrt{\gamma}} \sin \phi \cdot d\phi \quad (10)$$

さらに、 $\zeta_B = 1, \eta_B = \delta/L, \xi_B = (1-\lambda)/L$ なる条件を考慮して自

由端 B まで積分すれば

Fig.2 Illustration of cross-section of two-layered plate.

Fig.3 Relationship between non-dimensional deflection η_B and non-dimensional load γ .

Fig.5 Relationship between deflection angle θ_B and non-dimensional load γ .

Fig.4 Relationship between non-dimensional elongation ξ_B and non-dimensional load γ .

したがって、式(14)を利用して任意部材要素の中立軸に関する断面二次モーメント I_1 を知ることができ、例えば、2層はりの場合の I_1 , I_2 は次式(15), (16)より求められる。

$$I_1 = \frac{b_1 h_1^3}{12} + h_1 b_1 \left(\bar{y} - \frac{h_1}{2} \right)^2 \dots \dots \dots (15)$$

$$I_2 = \frac{b_2 h_2^3}{12} + h_2 b_2 \left(\bar{y} - \frac{h_2}{2} - h_1 \right)^2 \dots \dots \dots (16)$$

ステンレス薄板(第1層, 幅 b_1 : 27.0mm, 長さ L_1 : 300mm, 厚さ h_1 : 0.100mm, ヤング率 E_1 : 205.6GPa) と高分子(PVC)薄板(第2層, 幅 b_2 : 27.0mm, 長さ L_2 : 300mm, 厚さ h_2 : 0.515mm, ヤング率 E_2 : 3.41GPa) から成る2層片持はりの解析結果をそれぞれ図3(無次元荷重 γ と無次元たわみ η の関係), 図4(無次元荷重 γ と無次元水平距離 ξ の関係), 図5(無次元荷重 γ と自由端のたわみ角度 θ_B の関係)に示す。いずれの図でも, 併記した実験結果と解析理論はかなり良い一致性を示した。

4. むすび

本研究の解析の結果, 次の諸点が明らかとなった。

- (1) 従来未知であった自由端荷重を受ける多層板(解析例は2層薄板)の片持はりの大たわみ変形挙動が予想できる。
- (2) 垂直たわみや水平距離, たわみ角は自由端の荷重によって曲線的に変化する。
- (3) 無次元荷重は見かけの断面は同じでも, 形成する層の断面二次モーメント, ヤング率によって変化する。
- (4) 大たわみ実験による無次元水平距離, 無次元たわみなどの実験結果は解析理論とかなり良い一致を示し, 導出の大たわみ理論の有効性が確認された。

参考文献

- (1) Barten.H.J., Quart.Appl.Math., 2(1945), 168-171.
- (2) Bisshop.K.E. & Drucker.D.C., Quart.Appl.Math., 3(1945), 272-275.
- (3) 大槻, 名城大学理工学部研究報告, 26(1986), 21-28.

3. 理論解析及び測定例

多層板における中立軸の位置 $\bar{y}$ は, i 番目の部材の横断面が中立軸および z 軸に関して持つ断面一次モーメントをそれぞれ S_i , $(S_i)_z$ とすれば

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n E_i (S_i)_z}{\sum_{i=1}^n (E_i A_i)} \dots \dots \dots (14)$$