9 1 4 正方形断面曲がり管内の Taylor-Dean 流れに関する数値解析

Numerical analysis of the Taylor-Dean flow
through a curved duct of square cross-section

正 山本 恭二(岡山大・工) 学 ○武 暁雲(岡山大・自然(院))

正 百武 徹(岡山大・工) 正 柳瀬 真一郎(岡山大・工)

Kyoji YAMAMOTO, Xiaoyun WU, Toru HYAKUTAKE, Shinichiro YANASE

Okayama University, Okayama 700-8530, Japan

Keywords: Taylor flow, Dean flow, curved duct, secondary flow, bifurcation

1. 緒言

曲がり管を通る流れは工業上重要であるばかりでなく、曲がりに伴う遠心力の作用により生ずる二次流の物理的、数学的興味から、今日まで数多くの研究がなされてきている。その中のひとつは、多重解に関するものである。Winters⁽¹⁾は管の断面を四角い形状にとり、二次流れの多重性と分岐について研究した。

同心円柱間の流体に対し、円柱壁の回転により生ずる二次流、いわゆる、Taylor 渦に関しても多くの研究が行われてきている。長さの短い環形状曲がり管中の Taylor 渦は Cliffe⁽²⁾、と Lücke ら⁽³⁾ によって研究された。内円筒は回転し、管のほかの壁、すなわち、上部、下部と外部の壁は固定され、管に沿っての圧力勾配はない。断面の中心線に対して対称の 2 渦あるいは非対称二次流が現れる。同心円筒を回転させた流れと圧力による流れとの総合は Taylor-Dean 流であり、これまであまり研究されていない。このとき、流れは遠心力と回転に伴うコリオリ力の両方の影響を受ける。

この研究では、正方形断面を通る Taylor-Dean 流れを考える。管軸に沿った圧力勾配 G を一定とし、曲がり管の上部、下部と内壁の 3 壁は曲がり管の中心軸まわりに同じ角速度 Ω で回転し、外側の壁面のみ静止している。われわれは角速度を変化させて、断面二次流れの変化の様子および、得られた二次流の安定性、多重解と解分岐について調べる。流量の回転に伴う変化も求めている。この流れはねじ溝式ポンプ内の流れのモデル化であると考えられる。

2. 解析

幅と高さが $2a$ の正方形の断面を持つ曲がり管を通る流れを考える。回転の方向を垂直上向きになるとき Ω を正とし、このときの回転方向と同方向に管軸に沿った一定の圧力勾配 G を正としてとる。十分に発達し、管軸方向に変化のない定常流れを考える。Navier-Stokes 方程式を無次元化するとき、次の三つの無次元パラメータを得る。

$$\delta = a/R_0, Tr = 2\sqrt{2}\delta\Omega a^2/(\delta\nu), Dn = \sqrt{2}\delta a^3 G/(\mu\nu)$$

ここで、 δ は管の無次元曲率、 R_0 は管の中心線の曲率半径、 Tr は Taylor 数、 Dn は Dean 数、 μ は粘度、 ν は動粘性である。

この三パラメータを含む Navier-Stokes 方程式をチェビシェフ多項式を用いたスペクトル法に基づき解析している。定常解を得た後、更にその線形安定性について調べている。

3. 数値計算結果と考察

無次元曲率 $\delta=0.02$ のとき、 $Dn=0, 50, 100, 200, 400, 600, 800$ のそれぞれの場合について、 Tr を変化させ計算をおこなった。次下に得られた結果のいくつかを示す。

3.1 $Dn=0$

図 1 に、 $Dn=0$ と固定し、 Tr を変化させたときの流れを、 $Tr=-200$ と $Tr=200$ に対し示す。この図は右側の枠線が外

側の壁面を表している。二つの Tr 数について、左が断面内の流れ関数の等値線図、右が管軸方向速度の等値線図を示す。流れ関数の等値線図は負の値が時計回り、正の値が反時計回りの流れを示している。この場合圧力勾配がないから、コリオリ力により生ずる二次流れは断面内の流れ図において全部内向き中心線上の 2 渦である。

$Tr = -200$

$Tr = 200$

Fig. 1 Vortex patterns

3.2 $Dn=100$

図 2 に、 $Dn=100$ と固定し、 Tr を変化させたときの回転系でのテイラー数と管軸中心点速度の関係を示す。実線は流れが安定な状態で、点線は不安定な状態である。ここで黒丸は断面内の流れが外向きの 2 渦解を白丸は内向き 2 渦解、四方形は 4 渦解、下向きの三角形は非対称解を持つことを表している。また図 3 に $Tr=-200$ から $Tr=450$ までのいくつかの流れの様子を示す。

図 2 と図 3 を見ると、A 線上の流れの変化は A_1 から A_{10} まで、 Tr の変化に伴い、点 A_1 の $Tr=-200$ のときは内向き 2 渦流れ、点 A_2 の $Tr=-45$ のときは 4 渦になり、点 A_3 付近から A_4 の $Tr=100$ では外向きになり、 A_5-A_7 が 4 渦、 A_8-A_{10} は内向き 2 渦になる。

Fig.2 Axial velocity at the center of the cross-section ($Dn=100$)

$Tr=140$ 付近で B 線へ分岐し, B 線上では非対称流れが現れる。B₁ の $Tr=133$ のときの 4 渦非対称から, B₃–B₆ の 2 渦非対称への変化になる。同じ Tr に対して, 複数の解の存在, すなわち, 多重解が見られるが, この中のいくつかは, 不安定であることが解る。また, 管や装置に非対称性はないが, 流れに非対称が現れるのは興味深い。

Fig. 3 Vortex patterns

3.3 $Dn = 400$

Fig.4 Axial velocity at the center of the cross-section ($Dn=400$)

図 4 に, $Dn=400$ と固定し, Tr を変化させたときの回転系

でのテイラー数と管軸上速度の関係を示す。ここで上向き三角形は 6 渦, 黒四角形は 8 渦, 下向きの三角形は非対称解を持つことを表している。また図 5 に $Tr=-400$ から $Tr=500$ までいくつかパターン断面での流れの様子を示す。

図 4, 図 5 において流れの変化は, A₁–A₂ では内向き 2 渦であり, A₃–A₄ になったとき 4 渦になり, A₅–A₆ では外向きに 2 渦, A₇–A₁₀ では 4 渦, A₁₁–A₁₂ 内向き 2 渦になる。

B 線上のほうは, B₁ の 4 渦から B₂–B₄ の 8 渦へ変化し, B₁–B₆ の 4 渦のように変化する。

C 線では非対称流れが存在する。

D 線も非対称流であるが, C 線の様子と異なる。

Fig. 5 Vortex patterns

参考文献

- [1] Winters, K.H.: A bifurcation study of laminar flow in a curved tube of rectangular cross-section. *J. Fluid Mech.* 180, 343-369, 1987
- [2] Cliffe, K. A.: Numerical calculations of two-cell and single-cell Taylor flows. *J. Fluid Mech.*, 135, 219-233, 1983
- [3] Lücke, M., Mihelcic, M., Wingerath, K., Pfister, G.: Flow in a small annulus between concentric cylinders. *J. Fluid Mech.*, 140, 343-353, 1984