709 二つの円筒液体容器を有する弾性構造物の鉛直励振下における非線形連成振動

Nonlinear Parametric Vibrations of Elastic Structures Carrying Two Cylindrical Liquid-Filled Tanks under Vertical Excitation

正 池田 隆 (島根大) 正 村上 新 (島根大) 〇学 牛尾 真 (島根大・院)

Takashi IKEDA, Shimane University, 1060, Nishikawatsu-cho, Matsue-city, Shimane, 690-8504
Shin MURAKAMI, ibid.
Shin USHIO, ibid.

Key Words: Vibration Coupled with Fluid Motion, Sloshing, Nonlinear Vibration, Cylindrical Tank, Vertical Excitation, Internal Resonance

1. 緒言

塔状構造物などの弾性構造物の制振対策は工学的に重要な問題であり、制振対策の一つとして液体容器内の液面スロッシングを利用したパッシブ型の制振装置が使用されている。液体容器を用いる場合には実用的な面から複数の容器を用いる場合が多い。しかし、これまでに一個の液体容器を取り付けた系を対象とした研究報告⁽¹⁾⁽²⁾はあるが、複数の容器を対象とした報告は、鉛直励振下における二つの長方形容器をもつ弾性構造物に関する研究⁽³⁾のみである。

本研究では、部分的に液体で満たされた二つの円筒剛体容器が弾性構造物に取り付けられ、構造物が鉛直方向に正弦励振を受ける系を対象とする。構造物と二つの液体容器内のスロッシングの固有振動数の間に2:1:1の同調条件が満たされる場合に、流体力の非線形性を考慮してモード方程式を誘導し、共振曲線を解析的に求めた。主に、液位や同調条件のずれが系の応答に及ぼす影響を調べ、得られた理論解析結果の妥当性を実験によって確かめた。

2. 理論解析

図1に理論解析モデルを示す。一般の弾性構造物を、質量

m_0 、ばね定数 k 、減衰係数 c から成る一自由度系にモデル化する。質量 m_0 には鉛直方向に調和外力が作用し、半径 R の二つの円筒剛体容器 (容器1, 容器2と呼ぶ) が取り付けられる。これ以降、容器1, 2に関するパラメータの添字には i ($i=1,2$) を付けて区別する。また、円筒容器の静止時での液体の深さを h_i とする。静止時の液面上に x_i, y_i 平面をとり、容器とともに移動する直交座標 (x_i, y_i, z_i) および円筒座標 (r_i, θ_i, z_i) を考える。静止状態からの質量 m_0 の鉛直変位を

Fig.1 Theoretical model.

z_0 , 位置 (r_i, θ_i) での液面変位を η_i とする。液体について、速度ポテンシャルを ϕ_i , 圧力を P_i , 密度を ρ , 質量を m_i , 容器底面に働く z_i 方向の流体力を F_i とする。また、鉛直方向の正弦外力の振幅を F_0 , その振動数を ω , 時間を t , 重力加速度を g とする。ここで、次の無次元量を導入する。

$$\begin{aligned} z'_0 &= z_0/R, \eta'_i = \eta_i/R, r'_i = r_i/R, z'_i = z_i/R, h'_i = h_i/R, \\ v_0 &= m_0/M, v_i = m_i/(\pi M h'_i), \phi'_i = \phi_i/(R^2 p_{11}), k' = k/(M p_{11}^2), c' = c/(M p_{11}), \\ F'_0 &= F_0/(M R p_{11}^2), F'_i = F_i/(M R p_{11}^2), P'_i = P_i/(\rho_1 R^2 p_{11}^2), \omega' = \omega/p_{11}, \\ p'_{mn} &= p_{mn}/p_{11}, \bar{p}'_{mn} = \bar{p}_{mn}/p_{11}, t' = p_{11} t, \xi_{mn} = \lambda_{mn} R, \end{aligned}$$

$$[M = m_0 + m_1 + m_2, p_{mn} = \sqrt{g \lambda_{mn} \tanh(\lambda_{mn} h_1)}, \bar{p}_{mn} = \sqrt{g \lambda_{mn} \tanh(\lambda_{mn} h_2)}] \quad (1)$$

ただし、式(1)の[]内は有次元量であり、 M は構造物の質量と容器1, 容器2の液体の質量の総和である。また、 $p_{mn}, \bar{p}_{mn}$ は、それぞれ容器1, 容器2の液面スロッシングの (m, n) 次の固有振動数を表す。これ以降は、無次元量を表す記号 ' ' はすべて省略する。

線形系の自由振動解析より得られる固有関数を用いて強制振動解を仮定し、振幅およびパラメータのオーダを考慮すると、構造物の運動方程式、および容器1, 容器2内のスロッシングの (m, n) モードの振幅 $c_{mn}, d_{mn}, \bar{c}_{mn}, \bar{d}_{mn}$ に関するモード方程式が次のように導かれる。

$$Q_1 \ddot{z}_0 + c \dot{z}_0 + k z_0 + H_1(\ddot{z}_0, \dot{c}_{11}, \dot{d}_{11}, c_{11}, d_{11}) + \bar{H}_1(\ddot{z}_0, \dot{\bar{c}}_{11}, \dot{\bar{d}}_{11}, \bar{c}_{11}, \bar{d}_{11}) = F_0 \cos \omega t \quad (2a)$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{c}_{11} + 2\zeta_{11}\dot{c}_{11} + (1 + \psi_{11}\ddot{z}_0)c_{11} + H_2(\ddot{c}_{11}, \dot{d}_{11}, c_{11}, d_{11}) &= 0 \\ \ddot{d}_{11} + 2\zeta_{11}\dot{d}_{11} + (1 + \psi_{11}\ddot{z}_0)d_{11} + H_3(\ddot{c}_{11}, \dot{d}_{11}, c_{11}, d_{11}) &= 0 \\ \ddot{c}_{01} + 2\zeta_{01}\omega_0\dot{c}_{01} + \omega_0^2(1 + \psi_{11}\ddot{z}_0)c_{01} + H_4(\ddot{z}_0, \dot{c}_{11}, \dot{d}_{11}, c_{11}, d_{11}) &= 0 \\ \ddot{c}_{21} + 2\zeta_{21}\omega_2\dot{c}_{21} + \omega_2^2(1 + \psi_{11}\ddot{z}_0)c_{21} + H_5(\ddot{z}_0, \dot{c}_{11}, \dot{d}_{11}, c_{11}, d_{11}) &= 0 \\ \ddot{d}_{21} + 2\zeta_{21}\omega_2\dot{d}_{21} + \omega_2^2(1 + \psi_{11}\ddot{z}_0)d_{21} + H_6(\ddot{z}_0, \dot{c}_{11}, \dot{d}_{11}, c_{11}, d_{11}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2b)$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\bar{c}}_{11} + 2\bar{\zeta}_{11}\dot{\bar{c}}_{11} + \bar{\omega}_1^2(1 + \psi_{11}\ddot{z}_0)\bar{c}_{11} + \bar{H}_2(\ddot{\bar{c}}_{11}, \dot{\bar{d}}_{11}, \bar{c}_{11}, \bar{d}_{11}) &= 0 \\ \ddot{\bar{d}}_{11} + 2\bar{\zeta}_{11}\dot{\bar{d}}_{11} + \bar{\omega}_1^2(1 + \psi_{11}\ddot{z}_0)\bar{d}_{11} + \bar{H}_3(\ddot{\bar{c}}_{11}, \dot{\bar{d}}_{11}, \bar{c}_{11}, \bar{d}_{11}) &= 0 \\ \ddot{\bar{c}}_{01} + 2\bar{\zeta}_{01}\bar{\omega}_0\dot{\bar{c}}_{01} + \bar{\omega}_0^2(1 + \psi_{11}\ddot{z}_0)\bar{c}_{01} + \bar{H}_4(\ddot{z}_0, \dot{\bar{c}}_{11}, \dot{\bar{d}}_{11}, \bar{c}_{11}, \bar{d}_{11}) &= 0 \\ \ddot{\bar{c}}_{21} + 2\bar{\zeta}_{21}\bar{\omega}_2\dot{\bar{c}}_{21} + \bar{\omega}_2^2(1 + \psi_{11}\ddot{z}_0)\bar{c}_{21} + \bar{H}_5(\ddot{z}_0, \dot{\bar{c}}_{11}, \dot{\bar{d}}_{11}, \bar{c}_{11}, \bar{d}_{11}) &= 0 \\ \ddot{\bar{d}}_{21} + 2\bar{\zeta}_{21}\bar{\omega}_2\dot{\bar{d}}_{21} + \bar{\omega}_2^2(1 + \psi_{11}\ddot{z}_0)\bar{d}_{21} + \bar{H}_6(\ddot{z}_0, \dot{\bar{c}}_{11}, \dot{\bar{d}}_{11}, \bar{c}_{11}, \bar{d}_{11}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2c)$$

ここに、 $Q_1 = v_0 + \pi v_1 h_1 + \pi v_2 h_2$ であり、構造物の質量と容器1, 容器2の液体の質量の総和 M に対応する無次元量である。また、 $\omega_{mn}^2 = \psi_{mn}/\psi_{11}$, $\bar{\omega}_{mn}^2 = \bar{\psi}_{mn}/\psi_{11}$ ($\psi_{11} = \xi_{11} \tanh(\xi_{11} h_1)$) であり、 $H_i, \bar{H}_i$ ($i=1,2,\dots,6$) は()内の変数から成る非線形多項式である。共振曲線を求める際には(1,1)モードの節直径は y_i 軸と一致していると仮定する。この仮定が原因で共振曲線の一般的性質が失われることはない。従って、 $d_{mn}, \bar{d}_{mn} = 0$ とした式(2)に Andronov-Witt の方法⁽⁴⁾を適用して構造物の変位、および容器1, 容器2の液面の変位に対する共振曲線を解析的に求めた。

3. 数値計算

本章では、構造物の固有振動数 p_0 が容器1, 容器2の液面スロッシングの(1,1)モードの固有振動数 $p_{11}, \bar{p}_{11}$ の2倍に等しくなるような同調条件、すなわち無次元表示で $p_0 \approx 2p_{11} \approx 2\bar{p}_{11}$ が満たされるようにパラメータの値を選ぶ。図2(a),(b),(c)は、それぞれ構造物の鉛直変位 z_0 中の ω 成分、および容器1, 容器2の液面スロッシングの(1,1)モードの振幅 $c_{11}, \bar{c}_{11}$ 中の $(1/2)\omega$ 成分に対応する共振曲線を示す。パラ

Fig.2 Theoretical resonance curves

Fig.3 Experimental resonance curves for apparatus A

Fig.4 Experimental resonance curves for apparatus B

メータの値は $v_0=0.87$, $k=4.0$, $c=0.03$, $h_1=h_2=1.2$, $v_1=v_2=0.0172$, $F_0=0.0021$, $\zeta_{mn}=\bar{\zeta}_{mn}=0.008$ である。実線、破線はそれぞれ安定解、不安定解を表し、●印は式(2)を直接数値積分して求めた時刻歴をFFT分析することで得られた対応する振幅を表す。また、垂直方向の矢印は振幅の跳躍現象を表す。励振振動数 ω が 2.15 から徐々に減少すると、分枝 c が現れ、容器 1、容器 2 に同時に液面スロッシングが発生することがわかる。この振動様式を「二重モード」と呼ぶ。さらに励振振動数 ω が減少し分枝 a をたどる場合には、容器 1 のみ液面スロッシングが生じる。一方、分枝 b をたどる場合には、容器 2 のみ液面スロッシングが生じる。この振動様式を「単一モード」と呼ぶ。この場合の単一モードは、二つの容器の寸法と液位は全く同じであるにもかかわらず、一方の容器のみにスロッシングが生じる現象である。

4. 実験結果

理論解析結果の妥当性を確かめるため、図 1 と同様の装置を製作して実験を行った。

図 3 は装置 A を用いた場合の実験結果である。装置 A の緒元は $m_0=8.087\text{kg}$, $k=13153\text{N/m}$, $c=5.871\text{Ns/m}$, $R=47.5\text{mm}$, $h_1=h_2=57\text{mm}$, $m_1=m_2=404\text{kg}$, $F_0=0.659\text{N}$, $\zeta_{mn}=\bar{\zeta}_{mn}=0.012$, および液面の計測位置は $x_1=x_2=37.5\text{mm}$, $y_1=y_2=37.5\text{mm}$ である。固有振動数は $p_0=6.120\text{Hz}$, $p_{11}=\bar{p}_{11}=3.065\text{Hz}$ であり、 $p_0=2p_{11}=2\bar{p}_{11}$ の関係がほぼ満たされている。図 3(a),(b),(c) は、それぞれ構造物、容器 1 の液面スロッシング、容器 2 の液面スロッシングの変位応答の振幅曲線を示す。○, ●, ●印は液体容器をもつ場合、●印は液体を同じ質量の固体に置き換えた場合に、実験で得られた波形の振幅を表す。理論解析による共振曲線(実線と破線)も描かれている。図 2 に示した理論解析で予測されたように、●印と●印で示された

単一モードが容器 1 または容器 2 に現れ、励振振動数が増すと●印の二重モードの分枝に跳躍した。図 3 より、理論解析結果は定量的に実験結果とよく一致していることがわかる。

図 4 は装置 B を用いた場合の実験結果である。装置 B の緒元は $m_0=8.840\text{kg}$, $k=13210\text{N/m}$, $c=7.114\text{Ns/m}$, $h_1=57\text{mm}$, $h_2=52\text{mm}$, $m_1=404\text{kg}$, $m_2=369\text{kg}$, $F_0=0.725\text{N}$, $\zeta_{mn}=\bar{\zeta}_{mn}=0.012$ である。固有振動数は $p_0=5.900\text{Hz}$, $p_{11}=3.065\text{Hz}$, $\bar{p}_{11}=3.047\text{Hz}$ であり、同調条件 $p_0=2p_{11}=2\bar{p}_{11}$ の関係にわずかなずれが生じている。この場合の理論解析結果では、単一モードに対応する共振曲線上にホップ分岐が現れ、実験でもそれとほぼ同じ励振振動数の区間において●印と●印で示された振幅変調運動(Amplitude Modulated Motion)が発生した。

5. 結言

- (1) 励振振動数や液位に依存して、いずれか一方の容器のみに液面スロッシングが生じる単一モードと、両方の容器で同時に液面スロッシングが生じる二重モードの二種類の振動様式が現れる。
- (2) 同調条件にずれが生じると、単一モードに対応する共振曲線上の励振振動数の特定の区間にホップ分岐が現れ、振幅変調運動が発生する。
- (3) 実験では、理論解析結果と実験結果が定量的にほぼ一致し、理論解析の妥当性が確認された。

文献

- (1) Ikeda, T., *Nonlinear Dynamics* 33-1 (2003), 43.
- (2) Ikeda, T. and Murakami, S., *J. Sound & Vib.*, **285**-3 (2005) 517.
- (3) 池田・村上・上倉, 機構論, No.04-5(2004), D&D2004 CD-ROM 論文集, #648.
- (4) Stoker, J.J., (1950), *Nonlinear vibrations*, John Wiley & Sons, New York.