907 非線形復元力特性を考慮した磁気浮上コマの安定浮上条件の検討

Effect of Nonlinear Characteristics of Repulsive Force on Stable Levitating Conditions for a Magnetic Levitated Top

正 村上 新 (島根大) 正 池田 隆 (島根大) ○学 中村 啓宏 (島根大院)

Shin MURAKAMI, Shimane University, 1060 Nishikawatsu-cho, Matsue, Shimane

Takashi IKEDA, ibid.

Yoshihiro NAKAMURA, ibid.

Keywords: Magnetic levitated top, Rotor dynamics, Stability analysis, Levitron, U-cas, Nonlinear characteristics

1. 緒 言

本研究は、永久磁石の同極同士の反発力とジャイロ効果を利用して浮上する磁気浮上コマをあつかう。この磁気浮上コマは玩具として市販されているが、非接触、無制御で回転体を空中で支持できることから、今後、エネルギー貯蔵用フライホイールなどの工学的な応用が期待される。

この系に関し Gasch ら⁽¹⁾ はコマの並進運動と回転運動を含めた6自由度系として解析し、浮上点近傍で線形近似することによって安定浮上可能な回転数範囲が求められることを報告した。さらに、筆者らは上記の方法によって、磁気浮上コマの慣性モーメント、およびベース磁石の内・外径の安定回転数に対する影響を調べた⁽²⁾⁽³⁾。しかし、これらの安定性は中立条件であり、漸近安定とは異なるため、より厳密な安定性解析には非線形性を考慮する必要がある。

本研究では磁気反発力に起因する復元力および復元モーメントを、コマ重心の変位およびコマの傾きに関する三乗項まで考慮して多項式近似し、側面電流モデルを用いてその係数を求めた。さらに数値シミュレーションによってコマ磁石の挙動を調べ、安定浮上条件を検討した。

2. 理論解析

図1(a)に解析モデル、図1(b)に座標系を示す。磁気浮上コマは表裏で磁極が異なるドーナツ形の磁石を内蔵し、これを浮上させるために同様な形状のベース磁石が下方に設置されている。また、磁気反発力と重力との釣り合いを取るため、コマには付加質量が取り付けられる。コマの重心 G_t を通る直交座標系 $G_t-x'y'z'$ を考え、各軸まわりのコマの回転角を $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ とする。このコマの運動方程式は6自由度系として表されるが、コマの回転軸に対する対称性を考慮し、 z 軸まわりの回転 φ_z を除いた5自由度系として扱う。

コマの質量を m 、直径まわりの慣性モーメントを I 、極慣性モーメントを I_p 、回転数を Ω とし、コマに加わる各軸方向の磁力と各軸周りのモーメントをそれぞれ、 F_x, F_y, F_z, M_x, M_y 、周りの空気による減衰係数を並進運動に関して c 、傾き運動に関して c_φ とする。また磁力は側面電流モデルを用いて求め、コマの等価側面電流を I_t 、ベースの等価側面電流を I_b とする。コマ磁石の半径 r_t を長さの代表量、慣性モーメントの代表量を $I_0 = mr_t^2$ 、磁力の代表量を

Fig. 1 Analytical model

$F_0 = \mu_0 I_t I_b / (4\pi)$ 、時間の代表量を $1/\Omega_0$ ($= 1/\sqrt{F_0/(mr_t)}$) として次の無次元量を導入する。

$x' = x/r_t, \dot{x}' = \dot{x}/(r_t\Omega_0), \ddot{x}' = \ddot{x}/(r_t\Omega_0^2), y' = y/r_t, \dot{y}' = \dot{y}/(r_t\Omega_0), \ddot{y}' = \ddot{y}/(r_t\Omega_0^2), z' = z/r_t, \dot{z}' = \dot{z}/(r_t\Omega_0), \ddot{z}' = \ddot{z}/(r_t\Omega_0^2), \varphi_x' = \varphi_x, \dot{\varphi}_x' = \dot{\varphi}_x/\Omega_0, \ddot{\varphi}_x' = \ddot{\varphi}_x/\Omega_0, \varphi_y' = \varphi_y, \dot{\varphi}_y' = \dot{\varphi}_y/\Omega_0, \ddot{\varphi}_y' = \ddot{\varphi}_y/\Omega_0, I' = I/I_0, I_p' = I_p/I_0, F_x' = F_x/F_0, F_y' = F_y/F_0, F_z' = F_z/F_0, M_x' = M_x/(F_0r_t), M_y' = M_y/(F_0r_t), c' = c/r_t\Omega_0/F_0, c_\varphi' = c_\varphi\Omega_0/(F_0r_t)$
以上の無次元量を導入した運動方程式は次式となる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}' \\ \ddot{y}' \\ \ddot{z}' \\ \ddot{\varphi}_x' \\ \ddot{\varphi}_y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_\varphi' & \Omega' I_p' \\ 0 & 0 & 0 & -\Omega' I_p' & c_\varphi' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \\ \dot{z}' \\ \dot{\varphi}_x' \\ \dot{\varphi}_y' \end{pmatrix} = F'(x) \quad (1)$$

ここに $F'(x) = [F_x' \ F_y' \ F_z' - (mg/F_0) \ M_x' \ M_y']^T$ (g は重力加速度) である。 $F'(x)$ について平衡点近傍でテイラー展開を行うが、線形範囲で解析をする際には微小量の二乗以上を無視する。このとき鉛直方向成分 z は独立であるため残りの4自由度で安定性解析を行う。さらに空気による減衰係数を零と仮定すると、特性方程式は次式となる⁽¹⁾。

$$\lambda^4 - j\Omega' \frac{I_p'}{I'} \lambda^3 + \left(\frac{s_\varphi \varphi'}{I'} + s_r' \right) \lambda^2 - j\Omega' \frac{I_p'}{I'} s_r' \lambda + \left(s_r' \frac{s_\varphi \varphi'}{I'} - \frac{s_\varphi \varphi'^2}{I'} \right) = 0 \quad (2)$$

ここで S_r' は磁石の反発力に起因する半径方向の剛性、 $S_\varphi \varphi'$ は傾き剛性、 $S_\varphi \varphi'$ は並進力と軸の傾きに関する連成項の係数である。コマの安定浮上条件は式(2)の全ての固有値 λ の実部が正とならない場合である。式(2)より固有値 λ を求めると、安定条件を満たすのは全ての固有値が純虚数の場合であり漸近安定とはならない。さらに、減衰を考慮に入れると固有値の実部が正となるものが現れ不安定となる。したがって、より厳密な安定性解析には復元力、復元モーメントの非線形性を考慮する必要がある。

式(1)の $F'(x)$ について、平衡点近傍でそれぞれの変数の3乗のまでを考慮した多項式で近似する。例として、 x' 方向の復元力 F_x' を示すと次式となる。

$$F_x' = k_{x10000} x' + k_{x0001} \varphi_y' + \epsilon_{x10100} y' z' + \epsilon_{x00101} z' \varphi_y' + \beta_{x30000} x'^3 + \beta_{x20001} x'^2 \varphi_y' + \beta_{x12000} x' y'^2 + \beta_{x11010} x' y' \varphi_x' + \beta_{x10200} x' z'^2 + \beta_{x10020} x' \varphi_x'^2 + \beta_{x10002} x' \varphi_y'^2 + \beta_{x02001} y'^2 \varphi_y' + \beta_{x01011} y' \varphi_x' \varphi_y' + \beta_{x00201} z'^2 \varphi_x + \beta_{x00021} \varphi_x'^2 \varphi_y' + \beta_{x00003} \varphi_y'^3 \quad (3)$$

残りの復元力、復元モーメントについても同様に多項式近似する。各係数は平衡点近傍で磁気反発力を側面電流モデルを用いた計算により数値的に求め、最小2乗法を用いて決定した。具体的な数値は省略する。この係数を用いた運動方程式の数値シミュレーションを行い、安定回転数範囲を求めることができる。

3. 数値計算例

表1に、数値計算で使ったコマ磁石、ベース磁石の緒

Table 1 Parameters of magnets for analysis

	Outer diameter	Internal diameter	Thickness
Top	28.7 mm	10.0 mm	5.0 mm
Base1	131.0 mm	43.0 mm	40.0 mm
Base2	87.5 mm	26.5 mm	20.0 mm
Base3	130.5 mm	5.5 mm	20.0 mm

(a) Rotational speed 3000 rpm (without damping)

(b) Rotational speed 3161 rpm (without damping)

(c) Rotational speed 2700 rpm (with damping)

(d) Rotational speed 2800 rpm (with damping)

Fig. 2 Time history of magnetic top (Base 1, Decrease ratio from maximum mass 1.0%)

元を示す。既報⁽³⁾と同様に、コマ磁石は1種類に限定し、ベース磁石は3種類とした。この3つの組み合わせについて数値シミュレーションを行う。

図2は表1のBase 1において、浮上可能な最大質量に対してコマの質量がどの程度小さいかを示す質量減少率が1%の場合のコマ磁石の挙動と時刻歴である。左の図は横軸が無次元変位 x' 、縦軸は無次元変位 y' である。右の図は横軸が実時間、縦軸は無次元変位 x' である。安定浮上の判定は実時間で30000 s以上発散することなく浮上していることとした。減衰を零とした場合について、図2(a)に安定浮上の挙動($\Omega=3000$ rpm)を、図2(b)に不安定な場合($\Omega=3161$ rpm)を示す。これらは、線形解析の結果とほぼ一致している。また、減衰係数を $c=1.0 \times 10^{-6}$ N·s/m、 $c_\phi=1.0 \times 10^{-6}$ N·m·sとした場合について、図2(c)に安定浮上の挙動($\Omega=2700$ rpm)、図2(d)に不安定な場合($\Omega=2800$ rpm)を示す。図2(c)では安定浮上しているが、図2(d)では発散していることがわかる。

図3に数値計算によって求めた線形範囲の安定回転数範囲と非線形性を含めた安定回転数範囲を示す。横軸は質量減少率、縦軸は回転数を示し、実線で囲った斜線の範囲は、線形解析で求まる無減衰の場合の安定回転数範囲、 Δ は非線形項を考慮した無減衰での安定回転数範囲の境界、 $\circ$ は非線形項を含め、減衰係数が $c=1.0 \times 10^{-6}$ N·s/m、 $c_\phi=1.0 \times$

(a) Magnetic base 1

(b) Magnetic base 2

(c) Magnetic base 3

Fig. 3 Stable rotational speed vs decrease ratio from maximum mass

10^{-6} N·m·sとした安定回転数範囲の境界である。これより無減衰の場合では線形と非線形では安定回転数範囲はほぼ一致することがわかる。また減衰を考慮すると回転数の最小値には変化がみられないが最大値が下がり、安定回転数範囲が狭くなることがわかる。

4. 結言

磁気浮上コマの安定浮上条件に関し、磁気復元力の非線形性を考慮することによって以下のことが明らかになった。

- (1) 線形解析で求まる特性方程式での安定解析では、減衰を考慮に入ると全ての回転数で不安定となるが、非線形復元力を考慮することによりコマの挙動から安定な回転数範囲を求めることができる。
- (2) 無減衰では、線形解析での安定回転数範囲と非線形性を考慮した解析による安定回転数範囲はほぼ一致する。
- (3) 減衰を考慮に入れた場合、安定回転数の最小値にはほとんど変化がないが、最大値が下がる。その結果、安定回転数の幅が狭くなる。

文 献

- (1) Gasch, R. and Lang, M., *IMEchE Conf. Trans.*, (2000), 731-743
- (2) 村上・池田, 機構論, No.045-1 (2004), 195-196.
- (3) 村上・ほか2名, 機構論, No.065-1 (2006), 263-264.