6 1 4 ウェーブレット変換を用いた二自由度 Duffing 系の 確率論的ジャンプ現象の解析

Analysis for stochastic jump phenomena of 2-DOF Duffing oscillator using wavelet transform

○学 前川 瞬 (島根大・院) 正 田村 晋司 (島根大)

Jun MAEKAWA, Shimane University, 1060 Nishikawatsu-cho, Matsue-shi, Shimane
Shinji TAMURA, Shimane University

Key Words : Duffing Oscillator, Random Vibration, Wavelet Transform, 2-DOF system, Narrow Band Excitation, Stochastic Jump Phenomena

1. 緒言

狭帯域性の不規則励振が Duffing 系などの剛性非線形系に作用した場合、応答の標本関数において、振幅が時間的に急激に変化し、大振幅と小振幅との推移がランダムに発生する、確率論的なジャンプ現象が生じることがある。

一自由度非線形系において、複素ウェーブレット変換を用いて励振と応答の位相差を抽出することによって、応答の大振幅又は小振幅状態の判別が出来ることが示されている⁽¹⁾が、多自由度系に対しては調べられていない。

本研究では、多自由度非線形系の一つとして、二自由度 Duffing 系を取り上げ、複素ウェーブレット変換を用いて、確率論的ジャンプ現象の解析を行った。

2. 基礎方程式

同一の Duffing 系を直列に接続した二自由度 Duffing 系を考える。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2\zeta\omega_0(2\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \omega_0^2\{(2x_1 - x_2) + \epsilon x_1^3 - \epsilon(x_2 - x_1)^3\} &= f(t) \\ \ddot{x}_2 + 2\zeta\omega_0(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \omega_0^2\{(x_2 - x_1) + \epsilon(x_2 - x_1)^3\} &= 0 \end{aligned} \right\} (1)$$

不規則励振力 $f(t)$ は、平均値 0、自己相関関数 $R(\nu)$ のガウス性定常非白色雑音とし、 $R(\nu)$ は以下の指数減衰調和関数を考える。

$$R(\nu) = R_0 e^{-\alpha|\nu|} \cos \rho \nu \quad (2)$$

励振の帯域幅を表す無次元パラメータ A を線形一自由度系 ($\epsilon = 0$) の周波数応答関数のピークの鋭さを表す $\zeta\omega_0$ に対応する比とし、励振の卓越角振動数を表す無次元パラメータ B を減衰固有角振動数 $\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$ に対応する比として、次式のように導入する。

$$A = \frac{\alpha}{\zeta\omega_0}, \quad B = \frac{\rho}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (3)$$

本研究の計算において、系のパラメータおよび励振の帯域幅を表す A と励振の強さを表す R_0 を以下の値に固定した場合を考える。

$$\zeta = 0.05, \omega_0 = 1.0, \epsilon = 0.1, A = 0.01, R_0 = 1.0$$

$\epsilon > 0$ の硬性バネを考えるので、大振幅と同位相、小振幅と逆位相が対応する。また、励振の卓越角振動数を表す B は一次モードのピーク付近である $B = 0.8$ 、各応答の位相が反転する $B = 1.05$ 、二次モードのピーク付近である $B = 2.0$ とする。

3. ウェーブレット変換による位相差

関数 $x(t)$ に対して、マザーウェーブレット $\psi(t)$ による連続ウェーブレット変換は次式で定義される⁽²⁾。

$$\tilde{c}_x(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a}} \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) x(t) dt \quad (4)$$

ここで、 $*$ は複素共役である。本研究では $\psi(t)$ を次式のモルレーウェーブレットとする。

$$\psi(t) = \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{i2\pi f_0 t} e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (5)$$

中心振動数 f_0 をよく用いられる $\frac{5}{2\pi}$ とすると、モルレーウェーブレットの卓越角振動数は $\Omega = 5$ となる。

一般的にウェーブレット変換結果を示すとき、縦軸にスケールパラメータ a 、横軸に時間 t が用いられることが多いが、本研究ではマザーウェーブレットの卓越角振動数を用いた次式による変数変換により、縦軸を周期 T で示している。

$$a = \frac{\Omega T}{2\pi} \quad (6)$$

これにより、位相と周期の関係が明らかとなる。本研究におけるウェーブレット変換結果の着目すべき周期 T は、式 (3) と式 (6) より、表 1 の関係となる。

また、励振のウェーブレット変換 $c_f^*(T, t)$ と、応答のウェーブレット変換 $c_x(T, t)$ の偏角を取ることににより、励振と応答の位相差を得ることができる⁽¹⁾。

$$\phi_{fx}(T, t) = \arg\{c_f^*(T, t) c_x(T, t)\} \quad (7)$$

Table 1 Relation between B and T

B	0.8	1.0	2.0
T	7.9	6.3	3.1

4. 狭帯域不規則励振によるジャンプ現象

図 1 に $B = 0.8$ 、図 2 に $B = 1.05$ 、図 3 に $B = 2.0$ の場合のそれぞれの応答の標本関数および、ウェーブレット変換による励振と応答の位相差を示す。各図において、(a)(b) は応答 x_1, x_2 の標本関数であり、(c)(d) はウェーブレット変換による励振と応答 x_1, x_2 の位相差である。

まず、 $B = 0.8$ の場合、図 1(a)(b) の応答の標本関数より、 x_1 および x_2 で確率論的ジャンプ現象が発生していることがわかる。(c)(d) のウェーブレット変換による位相差

Fig. 1 Sample functions of response ($B = 0.8$)

Fig. 2 Sample functions of response ($B = 1.05$)

においても、同位相の 0 付近から逆位相の $-\pi$ または π 付近に変化していることより、確率論的ジャンプ現象が発生していることがわかる。また、(c)(d) より応答 x_1 と x_2 が同位相であるので、一次モードであることがわかる。

次に、 $B = 1.05$ の場合、図 2(a)(b) の応答の標本関数では、図 1 の $B = 0.8$ の場合に比べて比較的小振幅であることがわかる。また、(a)(b) からはジャンプ現象が発生していることは確認できない。しかし、(d) のウェーブレット変換結果では、 $-\pi$ と π が入り乱れていることがわかる。これは、 $B=1.05$ 付近で一次モードと二次モードの間となるため、どちらのモードでもない中間的な位相差が出ていると考えられる。

最後に、 $B = 2.0$ の場合、図 3(a)(b) の応答の標本関数より、 x_1 および x_2 で確率論的ジャンプ現象が発生してい

Fig. 3 Sample functions of response ($B = 2.0$)

ることがわかる。(c) のウェーブレット変換による位相差においても、同位相の 0 付近から逆位相の $-\pi$ または π 付近に変化していることおよび、(d) のウェーブレット変換による位相差では、逆位相の $-\pi$ または π 付近から同位相の 0 付近に変化していることから、確率論的ジャンプ現象が発生していることがわかる。また、(c)(d) より応答 x_1 と x_2 が逆位相であるので、二次モードであることがわかる。

5. 結論

同一の Duffing 系を直列に接続した二自由度 Duffing 系に対して、ウェーブレット変換による励振と応答の位相差を用いて確率論的ジャンプ現象の解析を行った。本研究で得られた知見を以下に示す。

- 励振力が系の連成固有角振動数に近い卓越角振動数を持つ場合、対応するモードにおいて確率論的ジャンプ現象が発生する。
- 励振力の卓越角振動数が系の 2 つの連成固有角振動数の中間となる場合、各モードに対応しない位相差を取る。

文 献

- (1) 田村晋司・舟越良文，ウェーブレット変換を用いた Duffing 系の不規則応答におけるジャンプ現象の解析 (第 2 報，複素ウェーブレット変換による解析)，機講論，10-8，(2010)，64。
- (2) P.S.Addison (新 誠一，中野和司 監訳)，図説ウェーブレット変換ハンドブック，(2005)，1-70，朝倉書店。
- (3) 田村晋司・鈴木康弘・木村康治，狭帯域不規則励振を受ける Duffing 系の確率論的ジャンプ現象の各種統計量，機論 C，75-754，(2009)，1560-1567。