ひずみゲージと解析関数による大たわみ問題の応力場推定に関する研究

Estimation of Stress Fields near Notch Roots in Real Plates Subjected to Large Out-of-Plane Deformations with Strain Data and the Analytic Functions

正 原田 豊満 (久留米高専), ○学 森田 直樹 (久留米高専 専攻科)

Toyomitsu HARADA, Kurume National College of Technology, 1-1-1 Komorino, Kurume, Fukuoka, 830-8555 Japan

Naoki MORITA, Advanced Engineering School of Kurume National College of Technology,

1-1-1 Komorino, Kurume, Fukuoka, 830-8555 Japan

Key Words: Stress Concentration, Analytic Function, Strain Gage, Out-of-plane Deformation, Large Deflection

1. 緒言

板状の構造は、航空機、船舶、自動車など、広範囲に使用されており、重要である。境界条件が複雑な実際の板状構造物の応力状態の推定を目的として、微小面外曲げと面内変形を同時に受ける板の切欠部の応力場を、解析関数とひずみゲージを用いて、精度よく推定する方法が提案されている⁽¹⁾。

本研究では、この方法を非線形問題である大たわみ問題に適用し、適用の妥当性と適用範囲について検討する。

2. 板の微小変形と大たわみ変形

2.1 微小変形

表 1 の平面問題と微小曲げ問題は、ともに微小変形問題である。基礎方程式は、それぞれエアリーの応力関数 F とたわみ w に関する線形方程式となり、式(1)、式(2)で表される。

2.2 大たわみ変形

表 1 の大たわみ問題のように、たわみ w が大きくなると、たわみ w による面内ひずみが発生し、板の長さは変化する。このため、板には曲げ応力とは別に、板厚方向に一樣な応力(膜応力)が生じる。また、この膜応力(F で表される)とたわみ角は面外荷重と同じ作用をして、たわみ w に影響を与える。すなわち、たわみ w と応力関数 F は、互いに影響しあう。

そのため、大たわみ変形に関する基礎方程式の式(3)は、非線形の連立偏微分方程式となる⁽²⁾。現在までのところ、この方程式の極座標系の一般解は得られていない。

なお、微小変形問題においても、大変形曲げ問題においても、板厚方向に一樣な応力(平面問題の応力、大変形曲げの膜応力)は、式(4)を用いてエアリーの応力関数 F から求められ、曲げ応力は、式(5)を用いて、たわみ w から求められる。

3. 応力場の推定方法

大たわみ問題の膜応力と曲げ応力の板厚方向の応力分布は、平面問題の面内応力と微小曲げ問題の曲げ応力と類似する。このことから、平面問題の解と微小曲げ問題の解を重ね合わせることで、大たわみ問題の応力場の推定を試みる。

微小変形問題の応力状態式の一例として、古典板曲げ理論による円孔板微小曲げの σ_θ の一般解(6)を示す。

$$\sigma_\theta^a = A_0^a (1-\nu) \left\{ (1-R^2) - \frac{1}{2} \left\{ (3+\nu)R^4 + (3+\nu)R^2 \right\} \left(A_1^a \cos \theta - B_1^a \sin \theta \right) - \frac{1}{2} \left\{ (3+\nu)R^4 - (1-\nu)R^2 \right\} \left(C_1^a \cos \theta + D_1^a \sin \theta \right) \right. \\ \left. + \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) \left\{ (n-2-n\nu-2\nu)R^n - (n-1)(1-\nu)R^{n-2} \right\} \left(C_n^a \cos n\theta - D_n^a \sin n\theta \right) \right. \\ \left. + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \left\{ (n+2-n\nu+2\nu)R^n - (n+1)(1-\nu)R^{n-2} \right\} \left(E_n^a \cos n\theta + F_n^a \sin n\theta \right) \right\} \dots (6)$$

ここで、 $R=r/r_0$ (r_0 : 円孔半径) である。

式(6)のような、微小な面内変形または面外変形を受ける切欠部の応力状態を示す一般解の $A_0^a, E_n^a \dots$ 等の未知係数(上付き添字 a は面外を表す)を、切欠部付近のひずみゲージによる応力値から決定することで、切欠部の応力状態を推定し、これを重ね合わせて、切欠部の応力状態を推定する。この際、応力状態式に含まれる無限級数は有限な級数で近似する。なお本研究では、ひずみゲージの応力値のかわりに、有限要素法の解析値を用いた。

図 1 は、本研究で検討した、中央に半径 $r_0=25\text{mm}$ の円孔をもつ薄板である。ヤング率及びポアソン比はそれぞれ 206GPa および 0.3 とした。板の上下縁は完全拘束および単純支持とした。ひずみゲージは、半径 $r=1.5r_0$ の円周を 12 等分する位置の板の表裏に合計 24 枚貼った。

Table 1. Small deformation problem and large deflection problem

Problem	Deformation and stress	Basic equation	Stress
Plane problem	σ_t : Plane stress	$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad \dots\dots (1)$ F : Airy's stress function	$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad \dots\dots (4)$
Small bending problem	w : Deflection σ_b : Bending stress	$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \quad \dots\dots (2)$	$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{D}{h^3/6} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y = -\frac{D}{h^3/6} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{xy} = -\frac{D(1-\nu)}{h^3/6} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad \dots\dots (5)$
Large deflection problem	w : Deflection σ_m : Membrane stress σ_b : Bending stress	$\begin{cases} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = E \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{h}{D} \left(q + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \end{cases} \quad \dots\dots (3)$	$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} : \text{Bending stiffness}$

Fig.1 Analytic model and position of strain gage

Fig.2 Variation of estimated error

4. 応力場推定結果および考察

本研究では、円孔縁の円周方向応力 σ_θ の最大値、 $\sigma_{\theta\max}$ で応力状態の推定誤差を評価する。

図2に、本法による図1の円周方向膜応力 $\sigma_{m\theta}$ の最大値 $\sigma_{m\theta\max}$ と、円周方向曲げ応力 $\sigma_{b\theta}$ の最大値 $\sigma_{b\theta\max}$ 、面外変形による応力（膜応力+面外曲げ応力）の最大値 $\sigma_{\theta\max}$ の推定結果を示す。推定誤差の基準は、有限要素法の解析結果である。図2より、面外の強制変位量 δ を変化させた場合と、中心軸から強制変位点までの距離 L を変化させた場合を比較すると、板厚に対する最大面外変位量、 $\delta_{\max}/t$ に対する推定誤差は、近い挙動を示している。これより、最大膜応力 $\sigma_{m\theta\max}$ と、最大面外曲げ応力 $\sigma_{b\theta\max}$ 、面外変形による最大応力 $\sigma_{\theta\max}$ の推定誤差は、板厚に対する最大面外変位量、 $\delta_{\max}/t$ で整理できると考えられる。

図3に、 $L=500\text{mm}$ で面外の強制変位量 δ を変化させた場合の、最大膜応力 $\sigma_{m\theta\max}$ と最大曲げ応力 $\sigma_{b\theta\max}$ 、面外変形による最大応力 $\sigma_{\theta\max}$ の本法で推定した応力と、FEMによる応力を示す。図3より、最大膜応力 $\sigma_{m\theta\max}$ は、小さな誤差で推定できている（グラフがほぼ重なっている）が、最大曲げ応力 $\sigma_{b\theta\max}$ は、大きな誤差が発生している。大たわみを受ける円孔縁では、たわみが増加すると、膜応力が主体的となり、曲げ応力は減少する。しかし、本法による推定結果ではこの曲げ応力の減少はみられない。このため、最大曲げ応力 $\sigma_{b\theta\max}$ の推定誤差は、 $\delta_{\max}/t$ に伴って急激に増加するが、面外変形による最大応力 $\sigma_{\theta\max}$ の推定誤差の増加は、最大膜応力のFEMによる値との推定誤差が小さい膜応力が支配的であるので、ゆるやかであり、小さい。今回検討した範囲では、 $\delta_{\max}/t$

Fig.3 Variation of bending and membrane stresses ($L=500\text{mm}$) Fig.4 Variation of coefficient of analytic functions ($L=500\text{mm}$)

≤ 0.6 であれば、最大膜応力 $\sigma_{m\theta\max}$ 、最大曲げ応力 $\sigma_{b\theta\max}$ 、面外変形による最大応力 $\sigma_{\theta\max}$ とも推定誤差は10%未満である。

図4に、本研究で用いた解析関数の係数の変化について特徴的なものを示した。解析関数の係数の値は、 $\delta_{\max}/t$ に比例せず非線形で変化している（線形問題では、各係数の値は、 $\delta_{\max}/t$ に比例する）。係数が $\delta_{\max}/t$ に対して複雑に変化することで、非線形問題である大たわみの応力状態を線形の解析関数で近似的に表すことができていると考えられる。

5. 結言

本研究では、大たわみを受ける中央円孔薄板の円孔部の応力場の推定に、微小曲げ変形と面内変形を同時に受ける板の応力場の推定方法を、適用することを試みた。その結果、以下の結論を得た。

- (1) 最大膜応力 $\sigma_{m\theta\max}$ と、最大曲げ応力 $\sigma_{b\theta\max}$ 、面外変形による最大応力 $\sigma_{\theta\max}$ の推定誤差は、板厚 t に対する最大面外変位量 $\delta_{\max}$ 、 $\delta_{\max}/t$ で整理することができる。
- (2) 今回検討した範囲では、最大膜応力 $\sigma_{m\theta\max}$ の推定誤差は、 $\delta_{\max}/t$ に対しても大きく変化せず、ほぼ一定であった。
- (3) 今回検討した範囲では、 $\delta_{\max}/t \leq 0.6$ であれば、最大膜応力 $\sigma_{m\theta\max}$ 、最大曲げ応力 $\sigma_{b\theta\max}$ 、面外変形による最大応力 $\sigma_{\theta\max}$ とも推定誤差は10%未満であった。

文献

- (1) 原田豊満, 野口博司, 日本機械学会論文集, 70-690, A(2004), 229-237.
- (2) S.timodhenko, 板とシェルの理論 下巻(1973), 357-403, ブレイン図書出版