328 格子ボルツマン法を用いた非線形系の不規則応答分布の推定

Estimation of Stochastic Response Distribution of a Non-linear System Using Lattice Boltzmann Method

○ 正 高原 弘樹 (東工大)

長谷川 敦司 (東工大院)

Hiroki TAKAHARA, Tokyo Institute of Technology, 2-12-1, O-okayama, Meguro-ku, Tokyo
 Atsushi HASEGAWA, Tokyo Institute of Technology

The lattice Boltzmann method has been applied to calculate the probability density function of a nonlinear system subjected to white noise excitation, because of its advantage that the algorithm of the lattice Boltzmann method easily satisfies the both conditions that probability is non-negative and total probability equal to one. The probability density function is governed by partial differential equation known as the Fokker-Planck equation. The local rule of the lattice Boltzmann method is obtained by assuming Fokker-Planck equation as a kind of diffusion-drift partial differential equation. The probability densities of a Duffing and a Van der Pol oscillator are calculated and compared with exact solution or Monte Carlo simulation results.

Key Words : Random Vibration, Lattice Boltzmann Method, Fokker-Planck Equation, Probability Density Function

A1. 緒言

ガタやヒステリシス等の非線形性を有する構造物が、地震動や風負荷などの再現性のない不規則な励振を受ける場合があり、不規則励振を受ける非線形系の動的挙動を明らかにすることは重要な問題となっている。本研究では、白色性励振を受ける系の応答の確率密度を支配する Fokker-Planck 方程式を、格子ボルツマン法を用いて解析を行った結果について報告する。

A2. 運動方程式と Fokker-Planck 方程式

次式で表される運動方程式が、平均値 0、スペクトル密度 S_0 のガウス性白色性励振 $f(t)$ を受ける場合に着目する。

$$\ddot{x} + g(x, \dot{x}) = f(t) \quad \dots\dots\dots (A1)$$

ここで、 $g(x, \dot{x})$ は非線形項を含む減衰および剛性項である。 $y = \dot{x}$ とすると、式 (A1) の応答の確率密度 $p(x, y, t)$ を支配する偏微分方程式である Fokker-Planck 方程式が次式のように表される。

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \pi S_0 \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + (-y \frac{\partial p}{\partial x}) + g(x, y) \frac{\partial p}{\partial y} + \{ \frac{\partial}{\partial y} g(x, y) \} p \quad (A2)$$

式 (A2) の解は確率密度であるため、近似解法を行う場合に、その結果が妥当なものであるためには、以下の性質を満たす必要がある。

- $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y, t) dx dy = 1$
- 全領域における確率密度 $p(x, y, t) \geq 0$

A3. 移動確率の仮定

Fokker-Planck 方程式を対流拡散方程式と見なし、各項の物理的な意味を考察することにより、格子ボルツマン法で用いる格子間の移動確率を仮定した。

A4. 計算結果

Duffing 系と Van der Pol 系に着目し、仮定した移動確率を用いて、定常・非定常の確率密度を求め、厳密解やモンテカルロシミュレーション結果と比較した。

図 A1 に、Duffing 系で用いた移動確率を示す。図 (a) は x 方向の移動確率 (正方向の移動確率を水色、負方向をピンク色で示す)、図 (b) は y 方向の移動確率 (正方向を赤色、負

方向を緑色で示す) である。

定常確率密度の計算結果と厳密解を図 A2, A3 に示す。また、 x, y の rms 応答の時刻歴を図 A4(a)(b) に示す。本解析の結果を実線、MCS の結果を○で示した

Fig. A1 Transition probabilities: Duffing oscillator

Fig. A2 Stationary probability density:LBM

Fig. A3 Stationary probability density:MCS

Fig. A4 Transient rms responses

A5. 結言

Fokker-Planck 方程式に格子ボルツマン法を適用し、応答の確率密度を求め、厳密解やシミュレーション結果と比較し、その有効性を示した。

1. 緒言

ガタやヒステリシス等の非線形性を有する構造物が、地震動や風負荷などの再現性のない不規則な励振を受ける場合があり、不規則励振を受ける非線形系の動的挙動を明らかにすることは重要な問題となっている。励振力が不規則性を有する場合には、確定論的な解析では必ずしも十分ではなく、確率論的な取り扱いが必要となる場合がある。とりわけ、閾値通過等の系の信頼性・安全性評価を行う場合には、応答の確率分布を知ることが重要になる。

白色性励振を受ける系の応答の確率密度はFokker-Planck方程式と呼ばれる偏微分方程式によって支配される⁽¹⁾。しかしこの方程式より、確率密度の厳密解が得られるのは、限られた場合であり、近似解を数値解析により求める研究がなされている⁽²⁾。数値解法を用いる際、以下の確率密度関数の性質

- 全確率が1である
- 確率密度が非負である

を満足するために様々な工夫がなされている⁽²⁾。

本研究では、上記の性質を容易に満たす解析法として格子ボルツマン法⁽³⁾に着目した。この手法は、仮想的な粒子を考え、実際の物理現象の特徴を考慮した簡単な移動則に従って粒子の移動を模擬し、あらかじめ定めた格子点上での粒子数の集合平均を直接求めることにより、現象を解析する方法である。このため、この手法は、確率密度の満たすべき上記の2つの性質を満たしている。ここでは、1自由度非線形系のFokker-Planck方程式に格子ボルツマン法を適用し、モンテカルロシミュレーション結果と比較した結果について報告する。

2. 運動方程式とFokker-Planck方程式

次式で表される運動方程式が、平均値0、スペクトル密度 S_0 のガウス性白色性励振 $f(t)$ を受ける場合に注目する。

$$\ddot{x} + g(x, \dot{x}) = f(t) \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $g(x, \dot{x})$ は非線形項を含む減衰および剛性項である。 $y = \dot{x}$ とすると、式(1)の応答の確率密度 $p(x, y, t)$ を支配する偏微分方程式であるFokker-Planck方程式が次式のように表される。

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \pi S_0 \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + (-y \frac{\partial p}{\partial x}) + g(x, y) \frac{\partial p}{\partial y} + \{ \frac{\partial}{\partial y} g(x, y) \} p \dots\dots (2)$$

式(2)の解は確率密度であるため、近似解法を行う場合に、その結果が妥当なものであるためには、以下の性質を満たす必要がある。

- $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y, t) dx dy = 1$
- 全領域における確率密度 $p(x, y, t) \geq 0$

すなわち、全確率が常に1のまま保存し、確率が常に非負の条件を満たす必要がある。

3. 移動確率の仮定

ここでは、式(2)のFokker-Planck方程式を格子ボルツマン法で解析するときに用いる移動確率について述べる。

3.1 解析空間 状態変数 x, y に対応して二次元の解析空間(格子)を考え、 x, y 方向にそれぞれ、 $2N, 2M$ 個に等分割する。 x, y 方向の格子幅をそれぞれ、 $\Delta x, \Delta y$ (一定)とすると格子点の位置 (x, y) は

$$x = i\Delta x (-N \leq i \leq N), y = j\Delta y (-M \leq j \leq M) \dots\dots (3)$$

となる。以下の格子ボルツマン法により解析では、式(3)中の i, j を用いて解析を行う。

3.2 移動確率 ある時刻で、前節で定義した格子点上に仮想粒子を考え、その粒子が次の時間ステップ(Δt 後)に、隣接した(上下左右の)格子点に移動するか、または、そのまま移動しないでその格子にとどまると仮定する。それぞれの格子点への移動確率を

$$\begin{array}{ll} x \text{ の正方向にひとつ格子を移動する確率} & a(i, j) \\ y \text{ の正方向にひとつ格子に移動する確率} & b(i, j) \\ x \text{ の負方向にひとつ格子に移動する確率} & c(i, j) \\ y \text{ の負方向にひとつ格子に移動する確率} & d(i, j) \\ \text{その格子にとどまる確率} & e(i, j) \end{array}$$

とする。粒子は必ず上記のどれかの移動を行うので、

$$a(i, j) + b(i, j) + c(i, j) + d(i, j) + e(i, j) = 1 \dots\dots (4)$$

$$a(i, j) \cdots e(i, j) \geq 0 \dots\dots (5)$$

の条件式を満たすものとする。この移動確率 $a(i, j) \sim e(i, j)$ の具体的な値は、式(2)で表されるFokker-Planck方程式を対流拡散方程式とみなして、その右辺各項の意味を考慮した移動則を仮定して、全体として、矛盾のないように移動確率を決定する。

3.2.1 x 方向の移動則 第二項 $-y \frac{\partial p}{\partial x}$ は、 x 方向の対流項と考えられ、この係数 y は、対流速度に対応するため、 $y > 0$ の範囲では x 軸正の方向への流れ、 $y < 0$ の範囲では、 x 軸負の方向への流れであると考えられる。また、係数の大きさは、 y 軸に沿って線形的に増加する。このため、この項に対する移動確率を、図1(a)のように仮定する。ここで、図中の矢印の大きさは移動確率の大きさを模式的に示している。

3.2.2 y 方向の移動則 式(2)の右辺第1項 $\pi S_0 \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}$ は、 y 方向の拡散項と考えられ、この係数 πS_0 は拡散係数に対応し、この係数が定数であるので、場所によらず拡散の影響は一定であると考えることができる。このため、この項に対する移動確率を、図1(b)のように仮定する。

第三項 $g(x, y) \frac{\partial p}{\partial y}$ は、 y 方向の対流項と考えられ、この係数 $g(x, y)$ は、対流速度に対応するため、 $g(x, y) > 0$ の範囲では y 軸負の方向への流れ、 $g(x, y) < 0$ の範囲では、 y 軸正の方向への流れであると考えられる。また、対流速度の大きさは、係数 $g(x, y)$ に比例する。このため、この項に対する移動則を $g(x, y) = x + y$ を例に図1(c)に示す。この場合、直線 $x + y = 0$ に対して、対称となるように対流速度の大きさが変化している。

3.2.3 とどまるとき移動則 最後に、第4項 $\{ \frac{\partial}{\partial y} g(x, y) \} p$ においては、次の時刻に対する増分が、係数 $\frac{\partial}{\partial y} g(x, y)$ に比例すると考える事ができる。しかし、とどまる確率を $\frac{\partial}{\partial y} g(x, y)$ に比例すると仮定すると、式(4)を満たすことが出来なくなる。よって、この項はとどまる確率を考慮する必要があると仮定する。

Fig. 1 Local rule

3.2.4 移動確率 これらの踏まえ、式(2)の右辺各項の係数や式(4)を考慮して、 x, y 方向の移動確率およびそ

の格子にとどまる確率は以下のように仮定する。

まず、 x 方向の移動確率 $a(i, j), c(i, j)$ に対しては、図1(a)で表されるような対流項のみが存在し、拡散項は存在しない。そこで、 $y > 0$ の範囲では x 軸正の方向へのみ移動する確率が存在し、 $y < 0$ の範囲では、 x 軸負の方向へのみ移動する確率が存在すると考える。

y 方向の移動確率 $b(i, j), d(i, j)$ は、図1(b)および(c)で表されるように、対流項に加え拡散項も存在する。このため、任意の格子点において y 軸方向、正負の方向への移動確率が存在する。また、 $g(x, y) > 0$ の範囲では y 軸負の方向への流れの方が大きく($d(i, j) > b(i, j)$)、 $g(x, y) < 0$ の範囲では、 y 軸正の方向への流れの方が大きくなり($d(i, j) > b(i, j)$)、これらの確率の差の大きさが、 $g(x, y)$ に比例すると考える。また、 $g(x, y) = 0$ の直線上の格子点では、 $b(i, j) = d(i, j)$ となる。

次に、 x 方向の移動確率 $a(i, j), c(i, j)$ と y 方向の移動確率の大きさ $b(i, j), d(i, j)$ の比を考える。これらは、着目する格子の位置 (i, j) での対流項の係数の大きさの比に対応すると考えられる。よって、 $\{a(i, j) - c(i, j)\} : \{d(i, j) - b(i, j)\} = j\Delta y : g(i\Delta x, j\Delta y)$ が与えられる。さらに、 x 方向と y 方向の格子間隔 $\Delta x, \Delta y$ が等しくない場合には、移動確率が隣の格子までの距離に反比例すると仮定して最終的に、 x 方向、 y 方向の移動確率の大きさの比は次式より決定される。

$$\begin{aligned} \{a(i, j) - c(i, j)\} &: \{d(i, j) - b(i, j)\} \\ &= \frac{j\Delta y}{\Delta x} : \frac{g(i\Delta x, j\Delta y)}{\Delta y} \quad \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

最後に、移動確率 $a(i, j) \sim d(i, j)$ より、とどまる確率 $e(i, j)$ は、次式のように求めることが出来る。

$$e(i, j) = 1 - \{a(i, j) + b(i, j) + c(i, j) + d(i, j)\} \quad \dots (7)$$

例として、 $g(x, y) = x + y$ の場合の x 方向および y 方向の移動確率 $a(i, j), c(i, j), b(i, j), d(i, j)$ を、図2,3で示す。各格子位置での移動確率の大きさ $a(i, j)$ を水色で、 $b(i, j)$ を赤色、 $c(i, j)$ をピンク色、 $d(i, j)$ を緑色で示した。ここで、 $N = M = 201$, $\Delta x = \Delta y = 0.10$ とした。図2中で定義されている x 方向の移動確率 $a(i, j), c(i, j)$ の最大値 A は式(4)の条件を満足する範囲で任意の値を取ることが出来る。また、図3中で示されているように y 方向の移動確率の差($d(i, j) - b(i, j)$)の最大値を $2D$ と定義する。

Fig. 2 Transition probabilities in x direction

3.3 $\Delta x, \Delta y, \Delta t$ の仮定 格子ボルツマン法での解析結果を、実際の現象と対応付けするためには、解析空間での格子点の間隔と実際の空間の間隔($\Delta x, \Delta y$)との関係、および、格子ボルツマン法での単位時間ステップ(Δt)が、実際には時間刻みとの関係を決定する必要がある。ここでは、 $\Delta x, \Delta y, \Delta t$ を以下のように仮定した。

図2,3中で示したように、 x 方向の移動確率 $a(i, j), c(i, j)$ の最大値を A 、 y 方向の移動確率の差($d(i, j) - b(i, j)$)の最

Fig. 3 Transition probabilities in y direction

大値を $2D$ と定義する。また、格子ボルツマン法で解析する領域の境界で、Fokker-Planck方程式(2)の右辺第3項の係数 $g(x, y)$ は、最も大きな値をとるように解析空間を設定する。

まず、Fokker-Planck方程式(2)の右辺第2項に着目する。係数の y は x 方向の対流速度に対応する。本解析では単位時間ステップ(Δt)に、 x 方向に単位間隔(Δx)移動すると考えているが、正の方向と負の方向に移動するものがあり、それらの平均が移動速度となる。そのため、注目する格子点 (i, j) における x 方向の移動確率の差 $\theta_j (= a(i, j) - c(i, j))$ を用いて、

$$y = j\Delta y = \theta_j \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \dots\dots\dots (8)$$

で表される⁽⁴⁾。従って、 x 方向の移動確率の傾きを $S = A/M$ (図2(b)参照)とすると $\theta_j = S \times j$ より、

$$\Delta t = S \frac{\Delta x}{\Delta y} \quad \dots\dots\dots (9)$$

が得られる。

次に、 y 方向の移動と関係する式(2)の右辺第1項と第3項に着目する。第3項の係数 $g(x, y)$ 最大となると仮定した解析空間の境界で対流項に対応する第3項と拡散項に対応する第1項の影響が等しいと仮定して、

$$\pi S_0 \frac{\Delta p}{\Delta y^2/2} = g(N\Delta x, M\Delta y) \frac{\Delta p}{\Delta y} \quad \dots\dots\dots (10)$$

式(6)より、解析空間の境界では

$$A : 2D = \frac{M\Delta y}{\Delta x} : \frac{g(N\Delta x, M\Delta y)}{\Delta y} \quad \dots\dots\dots (11)$$

したがって、

$$\pi S_0 = \frac{D}{S} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Delta y^2 \quad \dots\dots\dots (12)$$

が得られる。これにより、 $\Delta x, \Delta y$ と外力のスペクトル密度の関係が、式(12)のように求められる。式(12)より、ここで決定した移動則においては解析空間の大きさが系のパラメーターによって決定されるという特徴をもつ。つまり、系のパラメーターおよび外力のスペクトル密度と、 $\Delta x, \Delta y$ のいずれか一方、または、 $\Delta x, \Delta y$ の比を任意に設定することにより、 $\Delta x, \Delta y$ の両方が決定されることになる。

3.4 計算手順 ここで、実際の計算の際の手順を簡単に示す。なお、格子刻み $\Delta x, \Delta y$ に関しては、どちらか一方またはその比を設定することにより、双方が決定される(任意の値を取れるのはそのうちの1つのみである)。ここでは、例として Δx を設定した場合の計算手順を示す。

1. 解析する系と励振力のパラメータ $g(x, y), S_0$ の指定
2. 解析で用いるパラメータ $N, M, A, \Delta x$ の決定
3. 式(11)から、 D を求める

4. $S = A/M$ から, 式 (12) を用いて, Δy を求める
5. 式 (9) から, Δt を求める
6. 各格子での移動確率 $a(i, j) \sim e(i, j)$ を求める
7. 確率密度の初期分布の指定
8. 移動確率に従って確率を推移させる

4. 計算結果

非線形 1 自由度系として, Duffing 系と Van del Pol 系を取り上げ, 前章で示した方法により確率分布を計算し, 厳密解 (Duffing 系の定常応答のみ) やモンテカルロシミュレーション (以下, MCS) 結果との比較を行った.

4.1 Duffing 系

次式のような Duffing 系に着目する

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + kx + \varepsilon x^3 = f(t) \dots\dots\dots (13)$$

この系の, Fokker-Planck 方程式⁽¹⁾ は $\dot{x} = y$ として

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \pi S_0 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + (-y \frac{\partial P}{\partial x}) + (2\zeta y + kx + \varepsilon x^3) \frac{\partial P}{\partial y} + (2\zeta P) \dots\dots (14)$$

定常確率密度の厳密解は C を正規化定数として,

$$P(x, y) = C \exp \left\{ -\frac{2\zeta}{\pi S_0} \left(\frac{y^2}{2} + \frac{kx^2}{2} + \frac{\varepsilon x^4}{4} \right) \right\} \dots\dots (15)$$

計算には以下のようなパラメータを用いた.

$$\zeta = 0.1, k = -1.0, \varepsilon = 0.5, \frac{\pi S_0}{2\zeta} = 1.0$$

$$N = 201, M = 251, \Delta x = \Delta y = 3.12 \times 10^{-2}, \Delta t = 0.001$$

この時, 各移動確率は図 4 のようになる. (a) は x 方向, (b) は y 方向の移動確率を示す. 図の x 軸, y 軸は実空間上の $x = i\Delta x, y = j\Delta y$ であり, 各格子位置での移動確率の大きさ $a(i, j)$ を水色で, $b(i, j)$ を赤色, $c(i, j)$ をピンク色, $d(i, j)$ を緑色で示す.

Fig. 4 Transition probabilities: Duffing oscillator

4.1.1 定常応答 定常結合確率密度の格子ボルツマン法 (以下, LBM) による結果を図 5 に, 厳密解を図 6 に示す. 図 5 から, この系は二峰を持つ顕著な非ガウス性を示すことが確認できる. また, LBM による形状は厳密解とよく一致している.

さらに, 図 7(a)(b) に $y = 0, x = 0$ の断面における確率密度を示した. 実線が本解析の結果, 破線が厳密解, $\bigcirc$ が MCS の結果である. 図 7(a) においては, 厳密解・MCS の結果に比べ, 極大値付近でやや小さい値をとっているが, これらは比較的良好に一致している.

4.1.2 非常定応答 x および y の 2 次モーメントの時刻歴応答および, 非常定状態確率密度を示す. ここでは, 厳密解が存在しないため, MCS の結果と比較する.

初期分布が原点である ($t = 0$ において確率 1 で原点 $(0, 0)$ に存在する) 場合に注目する. 図 8(a)(b) は, x, y の rms 応答であり, LBM の結果を実線で, MCS の結果を $\bigcirc$ で示した.

σ_x が定常値の約 70% に達した時刻 ($t = 1.76$) における結

Fig. 5 Stationary joint probability density:LBM

Fig. 6 Stationary joint probability density:Exact

Fig. 7 Stationary probability densities

合確率密度を図 9(a) に, MCS の結果を同図 (b) に示した. また, これらの $y = 0, x = 0$ における断面図を図 10(a)(b) に示した. 実線が本解析の結果, $\bigcirc$ が MCS の結果である.

同様に, σ_x が極大値をとる時刻 ($t = 2.50$) における結合確率密度を図 11(a) に, MCS の結果を同図 (b) に示した. また, これらの $y = 0, x = 0$ における断面図を, 図 12(a)(b) に示した.

LBM による結果は MCS に比べて, 各モーメントの時刻歴応答ではやや大きな値をとっているが, モーメントの時刻歴, 確率密度ともによく一致している.

次に, 初期分布が原点以外の位置 ($x = y = 0.624$ (LBM における格子位置 $i = j = 20$)) にある場合に注目する. 図 13(a)(b) に, x, y の rms 応答および, 平均応答を示した. LBM による x, y の rms 応答および, 平均応答を実線および点線で, MCS の結果を $\bigcirc$ および, $\square$ で示した.

$t = 2.0$ における結合確率密度を図 14(a) に, MCS の結果を同図 (b) に示した. また, これらの $y = 0.374, x = 1.744$ における断面図を図 15(a)(b) に示した. 実線が本解析の結果, $\bigcirc$ が MCS の結果である. MCS に比べ, モーメントの時刻歴, 確率密度ともによく一致している.

4.2 Van del Pol 系 ここでは, 次式に示す Van der Pol 系の解析を行う.

$$\ddot{x} + \xi(-1 + x^2)\dot{x} + x = f(t) \dots\dots\dots (16)$$

Fig. 8 Transient rms responses

Fig. 9 Joint probabilities: $t = 1.76$ Fig. 10 Probability densities: $t = 1.76$ Fig. 11 Joint probabilities: $t = 2.50$ Fig. 12 Probability densities: $t = 2.50$

Fig. 13 Transient rms responses

Fig. 14 Joint probabilities: $t = 2.00$ Fig. 15 Probability densities: $t = 2.00$

この系の、Fokker-Planck 方程式⁽¹⁾は、 $\dot{x} = y$ として式(17)のようになる。

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \pi S_0 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + (-y \frac{\partial P}{\partial x}) + \{ \xi(-1+x^2)y + x \} \frac{\partial P}{\partial y} + \xi(-1+x^2)P \quad (17)$$

この式に対する厳密解は存在しない。計算には、以下のようなパラメーターを用いる。

$$\xi = 0.5, \quad \frac{\pi S_0}{\xi} = 1.0$$

$$N = 201, M = 301, \Delta x = \Delta y = 3.37 \times 10^{-2}, \Delta t = 0.001$$

この時、各移動確率は図16のようになる。(a)は x 方向、(b)は y 方向の移動確率を示す。図の x 軸、 y 軸は実空間上の $x = i\Delta x, y = j\Delta y$ であり、各格子位置での移動確率の大きさ $a(i, j)$ を水色で、 $b(i, j)$ を赤色、 $c(i, j)$ をピンク色、 $d(i, j)$ を緑色で示す

Fig. 16 Transition probabilities: Van der Pol oscillator

4.2.1 定常応答 定常結合確率密度のLBMによる結果を図17に、MCSの結果を図18に示す。また、図19(a)(b)に $y = 0, x = 0$ の断面における確率密度を示した。本解析の結果が実線、MCSの結果が○である。本解析の結果がMCSの結果とよく一致していることがわかる。

4.2.2 非定常応答 x および y の2次モーメントの時刻歴応答および、非定常状態確率密度をMCSの結果と比較する。

初期分布が原点である($t = 0$ において確率1で原点(0,0)に存在する)場合に注目する。図20(a)(b)は、 x, y のrms応答であり、本解析の結果を実線で、MCSの結果を○で示した。

σ_x が定常値の約70%に達した時刻($t = 1.70$)における結

Fig. 17 Stationary joint probability density:LBM

Fig. 18 Stationary joint probability density:MCS

Fig. 19 Stationary probability density

合確率密度を図21(a)に、MCSの結果を同図(b)に示す。このときの $y=0, x=0$ における断面図を、図22(a)(b)に示した。同様に、 σ_y が定常値の約70%に達した時刻($t=2.50$)における結合確率密度を図23(a)に、MCSの結果を同図(b)に示した。これらの $y=0, x=0$ における断面図を、図24(a)(b)に示した。本解析の結果が実線、MCSの結果が○である。各モーメントの時刻歴応答、確率密度ともにMCSの結果とよく一致している。

Fig. 20 Transient rms responses

5. 結言

白色性不規則励振を受ける振動系の確率密度を支配する偏微分方程式であるFokker-Planck方程式に、格子ボルツマン法を適用するための移動確率を、Fokker-Planck方程式を構成する項の物理的な考察から提案した。提案した移動確率を用いて、Duffing系およびVan der Pol系を解析し、

Fig. 21 Joint probabilities: $t=1.70$ Fig. 22 Probability densities: $t=1.70$ Fig. 23 Joint probabilities: $t=2.50$ Fig. 24 Probability densities: $t=2.50$

厳密解、および、モンテカルロシミュレーション結果を比較し、その有効性を示した。

文 献

- (1) Caughey T.K., "Derivation and Application of the Fokker-Planck Equation to Discrete Dynamic Systems Subjected to White Random Excitation", Journal of the Acoustical Society of America, **35**-11, (1963), 1683-1692
- (2) 木村康治, 田村晋司, 有限差分法によるFokker-Planck方程式の数値解析(第1報, 1自由度非線形系の解析), 機論, **65**-634, C(1999), 2188-2195
- (3) 葛原道久, 高田尚樹, 片岡武, 格子気体法・格子ボルツマン法-新しい数値流体力学的手法, コロナ社
- (4) 森下信, 長谷川純一, 中野孝昭, 築山洋, セルラオートマトン法による拡散現象の解析, 損壊学会論集, **183**, (1998), 181-187