340 伝達影響係数法による二次元トラス構造物の面内自由振動解析 (ピン接合の取り扱い)

Free Vibration Analysis of a Two-dimensional Truss Structure by the Transfer Influence Coefficient Method (A Treatment of pinned joint)

○学 稲垣 秀隆 (九州大) 正 井上 卓見 (九州大) 正 末岡 淳男 (九州大)

Hidetaka INAGAKI, Kyushu University, 10-1, Hakozaki 6-chome, Higashi-ku, Fukuoka
Takumi INOUE, Kyushu University
Atsuo SUEOKA, Kyushu University

The algorithm of the Transfer Influence Coefficient Method (TICM) has extended to be available to free vibration analysis of a two-dimensional truss structure. The algorithm applies to only a tight joint. The new algorithm is presented for pinned-joint as not limited of tight joint but usual truss structure. The new algorithm can be available to truss structure of tight joint or pinned-joint by using some models. A free vibration analysis of some two dimensional truss structures is carried out by the new algorithm, which usefulness is showed by comparing this algorithm with usual one.

Key Words : Computer Aided Analysis, Free Vibration, Eigenvalue Analysis, Coupled Vibration, Transfer Influence Coefficient Method, Truss structure

A1. 概 要

昨年度の研究では、高速・高精度の振動解析手法である伝達影響係数法を、二次元平面内で分岐・結合を繰り返す構造物に対して適用範囲を拡張した。しかし、その取り扱いは部材要素間の結合が剛であるとするラーメン構造物のみであった。

本報では、一般的なトラス構造物の結合はピン接合であることを考慮し、伝達影響係数法がこの取り扱いに対しても有効であることを示す。二次元トラス構造物の面内縦・曲げ連成自由振動を対象として、伝達影響係数法が、部材要素間の結合のばね定数の変化によって、ピン接合を再現できることを確認する。

A2. 数値計算結果

ここで提案した伝達影響係数法(TICM)のアルゴリズムを用いて、Fortran90による倍精度計算を行う。比較する一般的な計算手法として、系全体の自由度を含む質量マトリックスと剛性マトリックスによって、振動数方程式を立てて固有振動数を求める方法を用いる。これを便宜的に大マトリックス法(LMM)と呼ぶ。

解析モデルは図 A1 の構造物である。二つの主系が六つの従系によって結合されている。主系の分岐・結合の節点間の長さは 500mm、従系の長さが 500mm で、どちらも直径 20mm

の円形断面鋼性中実軸である。図に示したように、主系の分岐・結合の節点間および従系を 5 分割した集中系とする。ピン接合はばねを用いた結合によって再現している。そのばね定数は $k_x = k_y = 1.0 \times 10^{19} \text{ N/m}$, $K = 0 \text{ Nm/rad}$ としている。2 番目主系の両端は基礎支持要素によって支持されている。左端は単純支持とし、ばね定数は $\hat{k}_x = \hat{k}_y = 1.0 \times 10^{15} \text{ N/m}$, $\hat{K} = 0 \text{ Nm/rad}$, 右端は鉛直方向のみを固定とし、ばね定数は $\hat{k}_x = 1.0 \times 10^5 \text{ N/m}$, $\hat{k}_y = 1.0 \times 10^{15} \text{ N/m}$, $\hat{K} = 0 \text{ Nm/rad}$ とする。振動数方程式に二分法を適用して固有振動数を求める。固有振動数 f は、初期振動数刻み 0.1Hz で 0.1~500Hz 間を探索し、解を挟む振動数幅 Δf が $\Delta f / f < 10^{-10}$ を満たせば、その f を固有振動数とする。

結果を表 A1 に示す。ここで、LMM と TICM によって求められた解が異なっていた。正確な解の確認のために、LMM に関しては 4 倍精度計算を同時に行い、その結果を基準とする。倍精度計算は[Double precision : D], 4 倍精度計算は[Quatre loop : Q]で示し、値の異なる部分に下線を引いている。また、計算時間は TICM で 2 353(ms), LMM の 4 倍精度計算では 337 265(ms)であり、大きな差が見られた。このことから、提案したアルゴリズムの有効性が確認できる。

Table A1 Natural frequencies

TICM-D (Hz)	LMM-D (Hz)	LMM-Q (Hz)
154.9890555	154.98 <u>28125</u>	154.9890555
157.0160460	157. <u>4233872</u>	157.0160460
158.2089681	158.208 <u>5135</u>	158.2089681
158.3221642	158.309 <u>9607</u>	158.3221642
	<u>163.6521552</u>	
	<u>163.8596954</u>	
200.5527907	20 <u>6.2299701</u>	200.5527907
232.2027208	23 <u>6.7937578</u>	232.2027208
278.6838565	<u>282.0500262</u>	278.6838565
453.7139711	<u>455.4601318</u>	453.7139711

Fig.1 Sketch of a truss structure with pinned-joint

1. 緒 言

著者らが提案した伝達影響係数法は、多自由度の振動系において、その各節点における変位と力とを関連付ける動的影響係数を定義し、これを系の一端から他端にかけて逐次的に伝達計算をすることによって、種々の振動解析を行う手法である。伝達影響係数法を種々の構造物に適用し、自由振動、強制定常振動および時刻歴応答の数値計算を行い、高速かつ高精度の解析を実現してきた。

これまでの伝達影響係数法のアロリズムの改良によって、適用範囲が広がっており、二次元平面内で系が分岐と結合を繰り返す、内部に閉ループを含む構造物に対しても適用が可能となっている。しかし、その取り扱い、部材要素の結合が剛であるとするラーメン構造物に対してのみであった。

本研究では、実際の構造物によく見られるトラス構造⁽¹⁾において、その結合部がピン接合であることを考慮し、図1のように系が平面内で分岐と結合を繰り返す構造物に対して伝達影響係数法を適用する。基本的な二次元トラス構造物における面内自由振動解析を通じ、本手法の有効性を確認する。

2. ピン接合を含むトラス構造物に対する伝達影響係数法

本報では、ここで提案するアルゴリズムを簡潔に示すため、二次元平面内でピン接合によって分岐・結合を繰り返して閉ループを形成する構造物の面内縦・曲げ連成自由振動を解析

対象とする。

図1に示した構造物は、ピン接合を含む構造物としての代表的なものである。複数の主系(Main system)と、それらに結びつける従系(Sub system)によって構成されている。ここでは、二つの主系が存在して、それをいくつかの従系で結合している。その際に、主系と従系との結合はピン接合によって行われている。一般的なこの取り扱いを図2に示す。系は図2に示した、質量のないはりとし、基礎支持要素(BSE)によって支持された質量と回転慣性を持つ剛体からなる基本要素(Fundamental element)を連続的に結合した集中系としてモデル化されている。従系は主系の任意の節点からピンを介して分岐し、主系の任意の点にピンを介して結合する。複数の従系が共通の節点から分岐することや、複数の従系が共通の節点に結合することも可能である。こうしたモデル化により、任意の構造物をもつ面内構造物を取り扱うことが可能である。

伝達影響係数法を用いる場合、系の相対的左端から右端へと計算を行うので、主系、従系それぞれの左端から右端にかけての剛体要素を、各系における節点0～節点 n と呼ぶ。また、節点 j と節点 $j-1$ を結ぶ質量のないはり j 番目は要素と呼ぶ。

(1) 右上添字 i 付きの記号は、 i 番目主系に関する物理量を示す。ただし、右上添字 s 付きの記号は、任意の従系に関する物理量を示す

(2) 右下添字 j 付きの記号は、各系における節点 j ないし j 番目は要素に関する物理量を示す。

Fig.2 Diagram of the concept the Transfer Influence Coefficient Method

(3) 頭号「-」付きの記号は節点左側の物理量を、頭号のない記号は節点右側の物理量を示す。

(4) 頭号「^」付きの記号は、基礎支持要素に関する物理量を示す。

2.1 伝達影響係数法の基本過程 伝達影響係数法は、上述のように左端から右端へと計算を進めていく手法であり、図2に示すように、各主系の j 番め節点まで確定した構造物 (Established structure: ES) の i 番め主系の j 番め節点右側に、はり要素、剛体要素および基礎支持要素から成る基本要素 (Fundamental element) を剛に結合することを考える。これが伝達影響係数法の基本過程である。すべての主系・従系について、系右端まで基本要素の結合を繰り返すことで全体の系を確定させることができる。

本報で提案する伝達影響係数法では、図2における各主系の右端節点での変位と力の関係を動的影響係数行列 T を用いて以下のように定義する。

$$d = Tf \quad (1)$$

$$d = \{d_1^i, \dots, d_j^i, \dots, d_n^i\}, f = \{f_1^i, \dots, f_j^i, \dots, f_n^i\} \quad (2)$$

$$d_j^i = (x, y, \theta)_j, f_j^i = (F_x, F_y, N)_j$$

d_j および f_j は、系が角振動数 ω で調和振動をすると考えたときの変位および力の振幅ベクトルである。水平方向の変位を x 、鉛直方向の変位を y 、回転角を θ とし、水平方向にかかる力を F_x 、鉛直方向の力を F_y 、回転モーメントを N とする。また、 T は動的影響係数行列であり、 $3n \times 3n$ 正方対称行列である。 i 番目主系に基本要素を結合すると、式(1)の d 、 f 中の d_j^i 、 f_j^i が新たにそれぞれ d_{j+1}^i 、 f_{j+1}^i に置き換えられる。そのため、それに応じた動的影響係数行列 T' を新たに定義する。これが伝達影響係数法の基本過程であり、以降その伝達計算のための手法を示す。この計算アルゴリズムが以下の格間伝達則と格点伝達則である。

2.2 格間伝達則と格点伝達則 図2から、結合する基本要素のはり両端に作用する力、および剛体要素に作用する力のつり合いは、それぞれ以下のように表される。ただし、 $\bar{f}_{j+1}^i = (\bar{F}_x, \bar{F}_y, \bar{N})_{j+1}^i$ である。

$$\left. \begin{aligned} d_{j+1}^i &= L_{j+1}^i d_j^i + F_{j+1}^i \bar{f}_{j+1}^i, f_j^i = L_{j+1}^i \bar{f}_{j+1}^i \\ L_{j+1}^i &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & l & 1 \end{bmatrix}_{j+1}^i, F_{j+1}^i = \begin{bmatrix} \alpha_x & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_y & \gamma \\ 0 & \gamma & \beta \end{bmatrix}_{j+1}^i \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} (\alpha_x, \alpha_y, \beta, \gamma)_{j+1}^i &= (l/EA, l^3/3EI, l/EI, l^2/2EI)_{j+1}^i \\ \bar{f}_{j+1}^i + P_{j+1}^i d_{j+1}^i &= f_{j+1}^i, P_{j+1}^i = \hat{K}_{j+1}^i - \omega^2 M_{j+1}^i \\ M_{j+1}^i &= \text{diag}(m, m, J)_{j+1}^i, \hat{K}_{j+1}^i = \text{diag}(\hat{k}_x, \hat{k}_y, \hat{K}_{\theta})_{j+1}^i \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここで、 l_{j+1}^i 、 $(EA)_{j+1}^i$ および $(EI)_{j+1}^i$ は、それぞれはり要素の長さ、引っ張り剛性および曲げ剛性、 m_j^i および J_j^i は、剛体要素の質量および面内回転に関する慣性モーメント、 $\hat{k}_{x,j+1}^i$ 、 $\hat{k}_{y,j+1}^i$ および $\hat{K}_{\theta,j+1}^i$ は、それぞれ基礎支持要素の x, y 軸方向せん断ばね定数および面内回転に関するばね定数である。式(3)を用いて式(1)の d_j^i 、 f_j^i を d_{j+1}^i 、 f_{j+1}^i で置き換えると、以下の関係を得る。

$$d' = T' f', d' = \{d_1^i, \dots, d_{j+1}^i, \dots, d_n^i\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} f' &= \{f_1^i, \dots, f_{j+1}^i, \dots, f_n^i\} \\ T' &= LTL + F, L = \text{Diag}[0_3, \dots, 0_3, L_{j+1}^i, 0_3, \dots, 0_3] \\ F &= \text{Diag}[0_3, \dots, 0_3, F_{j+1}^i, 0_3, \dots, 0_3] \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ここに、 L, F は i 番め対角ブロックのみにそれぞれ L_{j+1}^i 、

Fig.3 Transition of the coordinate between $O-xy$ and $O-x'y'$

F_{j+1}^i が存在し、他の要素はすべて零となる $3n \times 3n$ 正方行列である。式(6)によってはりの結合に伴う動的影響係数行列の変換を行う。これが格間伝達則であり、 T' が新たな動的影響係数行列となる。次に、式(4)を用いて式(5) f' 中の f_{j+1}^i を f_{j+1}^i で置き換えると、

$$d' = T' f', f' = \{f_1^i, \dots, f_{j+1}^i, \dots, f_n^i\} \quad (7)$$

$(I_{3n} + \bar{T}'P)T' = \bar{T}', P = \text{Diag}[0_3, \dots, 0_3, P_{j+1}^i, 0_3, \dots, 0_3] \quad (8)$ が成立する。ここに、 I_{3n} は $3n \times 3n$ 単位行列、 P は i 番め対角ブロックのみに P_{j+1}^i が存在し、他の要素はすべて零となる $3n \times 3n$ 正方行列である。式(8)によって剛体要素の結合に伴う動的影響係数行列の変換を行う。これが格点伝達則であり、 T' が新たに得られた動的影響係数行列である。

このように、 i 番め主系に基本要素を結合することによる動的影響係数行列の伝達則が式(6)、(8)で表される。このアルゴリズムは、基本要素が i 番め以外の他の主系や従系に結合する際にも、まったく同様に適用できる。

2.3 座標変換 2.2 節では、長手方向を x 軸として、すべての系を同じ座標系として定式化を行った。しかし、実際の場合はそれぞれの系で長手方向が異なるため、統一した座標系で物理量を取扱う必要がある。図3に示すように、適当に設定した統一座標系 $O-xy$ から取扱う系の座標系 $O-x'y'$ が角度 α だけ傾いている場合、座標系 $O-x'y'$ において表された行列 L_{j+1}^i 、 F_{j+1}^i および P_{j+1}^i を、以下の式(9)に示す座標変換を用いて統一座標系 $O-xy$ における表示に変換する必要がある。座標変換して新たに表された L_{j+1}^i 、 F_{j+1}^i および P_{j+1}^i を、本報で提案するアルゴリズムに用いればよい。

$$\left. \begin{aligned} RL_{j+1}^i R &\Rightarrow L_{j+1}^i, RF_{j+1}^i R &\Rightarrow F_{j+1}^i \\ RP_{j+1}^i R &\Rightarrow P_{j+1}^i, R = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

2.4 分岐の取扱い 再び図2に示すように、各主系の j 番め節点までが確定した構造物を考え、式(1)の関係を示す動的影響係数行列 T が得られているとする。いま、図4に示す

Fig.4 Example of forking node with pinned-joint

Fig.5 Example of forking node with pinned-joint

ように、 i 番め主系の節点 j からピンを介して系が二つに分岐すると考える。一方が主系の延長であり、もう一方が従系に相当する。

図 4 において、式(1)によって定義された状態を ES1 とする。一方、ピンを介して分岐した従系の左端要素を一つの独立した系とらえて確定させ、それを ES2 とする。このとき ES2 を定義する 3×3 正方対称行列 T_0^s は以下の式(10)で表される。

$$d_0^s = T_0^s f_0^s, \quad P_0^s T_0^s = I_3 \quad (10)$$

以降、この二つの系 ES1, ES2 をピン接合要素(Pined joint element: PJE)によって結合させ、一つの新しい系として確定させることを考える。ここで、二つの節点間で以下に示したばねを $k_x^c = k_y^c = \infty$, $K^c = 0$ として結合することによってピン接合を近似する。このうち k_x^c , k_y^c はそれぞれ x 方向, y 方向せん断ばね定数を, K^c は面内回転におけるばね定数を表している。

$$K^c = \text{diag}(k_x, k_y, K)^c \quad (11)$$

まず、二つの系を含んだ一つの系として結合前の状態を表した後、ピンを介して動的影響係数行列を変換し、結合後の新たな系として確定させる。

結合前の状態を表す動的影響係数行列 T^s を考える。ES1 を表す動的影響係数行列 T の $(n+1)$ 行 $(n+1)$ 列ブロックに T_0^s を挿入したものを用いて式(12)で表す。ここで T^s は $3(n+1) \times 3(n+1)$ 正方対称行列であり、 0 は $3n \times 3$ 零行列である。

$$T^s = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & T_0^s \end{bmatrix} \quad (12)$$

ここで確定した動的影響係数行列 T^s に対応させるために、力ベクトルと変位ベクトルを新たな形に変換する必要がある。式(1)における f , d それぞれの $(n+1)$ 番めブロックに式(10)における f_0^s , d_0^s を挿入する。これらを新たな力ベクトル $f^{i,s}$, $d^{i,s}$ とする。

$$('f_j^i, \dots, 'f_j^i, 'f_j^c, 'f_j^c, 'f_0^s) \Rightarrow f^{i,s} \quad (13)$$

$$('d_j^i, \dots, 'd_j^i, 'd_j^c, 'd_j^c, 'd_0^s) \Rightarrow d^{i,s} \quad (14)$$

次に図 5 で示したように、によってピンによって生じる力ベクトル $f^{i,c}$ を考慮した場合のピン両側の節点における力と変位の関係を以下に示す。

$$\left. \begin{aligned} d^{i,s} &= T^s (f^{i,s} + f^{i,c}) \\ f^{i,c} &= ('0_3, \dots, '0_3, 'f^c, '0_3, \dots, '0_3, -'f^c) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

ここで、ピン接合要素による力ベクトル $f^{i,c}$ は以下のように表すことができる。 $K^{i,c}$ はピン接合要素を表す剛性行列であり、 ii , $(n+1)(n+1)$, $(n+1)i$ および $i(n+1)$ ブロックのみに要素が存在し、その他の成分はすべて零となる $3(n+1) \times 3(n+1)$ 正方対称行列である。

$$K^{i,c} = \begin{bmatrix} 0_3 & \dots & 0_3 & 0_3 \\ \vdots & K^c & \vdots & -K^c \\ 0_3 & \dots & 0_3 & \\ 0_3 & -K^c & 0_3 & K^c \end{bmatrix} \quad (16)$$

← i -th block of row

← i -th block of column

式(16)を式(15)に代入して整理すると次の関係が得られる。

$$d^{i,s} = T^{i,s} f^{i,s}, \quad (I_{3(n+1)} + T^s K^{i,c}) T^{i,s} = T^s \quad (17)$$

これがピン接合を介した分岐における基本的な変換則となる。ここで、 K^c の成分に無限大や零を用いる必要があり、その場合、計算において数値的不安定を生じることが考えられる。そこで、式(18)に示す変換行列 U を用いて安定な計算を可能にする。これは、対角ブロック成分に I_3 , $i(n+1)$ ブロック成分に $-I_3$ が存在し、その他の成分はすべて零となる $3(n+1) \times 3(n+1)$ 正方行列である。

$$U = \begin{bmatrix} I_3 & & 0_3 \\ & \ddots & \\ & & -I_3 \\ 0_3 & & & I_3 \end{bmatrix} \quad (18)$$

← i -th block of row

まず、式(15), (16)をそれぞれ U を用いて変換し、以下のようにおく。

$$U d^{i,s} = U T^s (f^{i,s} + f^{i,c}) \quad (19)$$

$$f^{i,c} = -K^{i,c} U^{-1} U d^{i,s} \quad (20)$$

式(19), (20)を整理すると次式が得られる。

$$U d^{i,s} = U T^{i,s} f^{i,s}, \quad (U^{-1} + T^s K^{i,c} U^{-1}) U T^{i,s} = T^s \quad (21)$$

ここで得られた式(21)によって数値的不安定を防ぐことができる。以降、分岐した従系に基本要素を結合していく際には $T^{i,s}$ の $(n+1)$ 行 $(n+1)$ 列ブロックをターゲットとして格間・格点伝達則を行えばよい。

また、従系への分岐ではなく、 i 番め主系から i 番め主系へと同じ主系におけるピンによる結合の場合も同様のアルゴリズムで計算し、最終的に得られる $T^{i,s}$ の $(n+1)$ 行成分および $(n+1)$ 列成分をそれぞれ i 行および i 列に複写し、 $(n+1)$ 行成分および $(n+1)$ 列成分を削除すればよい。

2.5 結合の取扱い 2.4 節で述べたように、 i 番め主系の節点 j から分岐した従系があり、それが節点 r まで延長されたとする。図 6 に示すようにその従系が k 番め主系の節点 l とトラス結合要素を介して結合する場合を考える。2.4 節では、二つの系をピン接合要素において結合させるという操作をによって系の分岐を行っているため、分岐した従系が主系に結合する際にも同様のアルゴリズムを用いることができる。結合前の状態を表す動的影響係数を T_r^s 、結合後の状態を $T^{k,s}$ とすると、式(20)と同様に、動的影響係数の変換則は以下のように表せる。

Fig.6 Example of connecting node with pinned-joint

$$\begin{aligned}
 U d^{k,s} &= U T^{k,s} f^{k,s}, (U^{-1} + T_r^s K^{k,c} U^{-1}) U T^{k,s} = T_r^s \\
 d^{k,s} &= ({}^t d_j^1, \dots, {}^t d_j^k, \dots, {}^t d_j^n, {}^t d_r^s) \\
 f^{k,s} &= ({}^t f_j^1, \dots, {}^t f_j^k, \dots, {}^t f_j^n, {}^t f_r^s) \\
 K^{k,c} &= \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & K^c & \vdots & -K^c \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -K^c & 0 & K^c \end{bmatrix} \leftarrow k\text{-th block of row} \\
 &\quad \uparrow k\text{-th block of column}
 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(22)$$

これが結合における動的影響係数の変換則である。結合により式(22)の $T^{k,s}$ が新たに求まったのち、従系の自由度は失われるため、 $(n+1)$ 行成分および $(n+1)$ 列成分を削除して、以降の伝達計算を行えばよい。

2.6 左端の取扱い 伝達影響係数法において、左端から右端へと動的影響係数行列の伝達計算を行う。この計算を開始するにあたり、その初期値 T_0 を求める必要がある。一般に系の左端はすべての主系の左端に相当し、それぞれが剛体要素とその基礎支持要素から成っている。したがって、左端の節点における力のつりあいから、 T_0 は以下のように、 $3n \times 3n$ 正方行列として得られる。

$$P_0 T_0 = I_{3n}, P_0 = \text{Diag}[P_0^1, \dots, P_0^n] \quad \dots\dots\dots(23)$$

一つの左端から二つの系が出ている場合は T_0 に対して 2.4 節で示した分岐の取り扱いを適用して計算を開始すればよい。

2.7 振動数方程式 前節までに示した手法を用いて、系の左端から右端までの伝達計算を行い、系全体の右端における動的影響係数行列 T が求められる。右端の状態は 2 種類あり、図 7 に示す。

(A) に示したように T が主系の延長に基づく格間伝達則から求められる場合には、式(4)、(5)から次の関係が成立する。

$$(I_{3n} + P \bar{T}^1) \bar{f}^1 = f^1 \quad \dots\dots\dots(24)$$

一方、(B) に示したように、 T が主系と従系との結合から求められる場合、式(20)の i を k として、2.4 節の結合の取り扱いの形式に変換した

$$f^{k,c} = -K^{k,c} U^{-1} U d^{k,s} \quad \dots\dots\dots(25)$$

と、式(22)から、

$$(I_{3(n+1)} + K^{k,c} U^{-1} U T_r^s) f^{k,c} = -K^{k,c} U^{-1} U T_r^s f^{k,s} \quad \dots\dots\dots(26)$$

の関係が得られる。ここで、系の右端の右側は常に自由であるため、そこにおける力は零、すなわち式(24)において $f^1 = 0$ 、式(26)において $f^{k,s} = 0$ となる。これに対し、系の右端節点の左側にかかる力は零にならない。つまり式(24)において $\bar{f}^1 \neq 0$ 、および式(26)において $f^{k,c} \neq 0$ である。したがって、

$$\left. \begin{aligned} \det(I_{3n} + P \bar{T}^1) &= 0 \\ \text{or } \det(I_{3(n+1)} + K^{k,c} U^{-1} U T_r^s) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(27)$$

が成り立たなければならない。これが振動数方程式に相当する。この式を満たす ω が固有角振動数となる。

2.8 固有モード 伝達影響係数法を用いて固有モード

Fig.7 Examples of right end

を求める手順は、動的影響係数行列の伝達計算を左端から右端にかけて行った後で、その計算ルート逆をたどり、右端から左端にかけて実行される。伝達影響係数法の特徴として、ばね定数の変化によって様々な境界条件に対応できるという点がある。右端を固定端とみなした場合に、その変位ベクトル $d = 0$ となってしまうので、固有モードを求める際には、通常零ベクトルとならない力ベクトル、すなわち式(24)の $\bar{f}^1$ 、または式(26)の $f^{k,c}$ から決定する。

2.7 節で述べたように系の右端には二種類ある。主系の延長で終わる場合と、主系と従系との結合で終わる場合であり、前者の場合には式(24)において $f^1 = 0$ 、後者の場合には式(26)において $f^{k,s} = 0$ である。式(24)の $\bar{f}^1$ 、または式(26)の $f^{k,c}$ の一つの成分を適当に設定し、連立方程式を解くことによってそれぞれのベクトルを決定することができる。これらの力ベクトルが求まれば、主系または従系の延長に基本要素が結合されている場合は式(1)、(3)を用いて変位ベクトル d を求め、系の相対的な右から左へと漸化的に求めることができる。また、主系と従系の結合による部分では、式(26)を用いて部材間の結合要素の力ベクトルを求め、同様に式(1)、(3)を用いて変位ベクトル d を求める。これらの計算手順を、動的影響係数行列の伝達計算と逆のルートをたどって、右端から左端にかけて変位ベクトル d を求めることができる。最終的に得られた各節点での変位、角変位が固有モードに相当する。

3. 数値計算結果

2章で定式化した伝達影響係数法のアルゴリズム (Transfer Influence Coefficient Method : TICM と呼ぶ) を確認するために数値計算を行う。仕様計算機は PC-AT 互換機 (1.4GHz プロセッサ, 384MB RAM) である。Fortran90 による倍精度計算を行う。

解析モデルは図 1 の構造物である。図中の Forking node"1 ~ "N" は主系と従系が分岐・結合する節点である。主系の分岐・結合の節点間の長さは 500mm、従系の長さが 500mm で、どちらも直径 20mm の円形断面鋼性中実軸である。図 1 に示すように、主系の分岐・結合の節点間および従系を 5 分割し、分割された要素の質量と慣性モーメントを左右端に等分した集中系としたモデル化である。式(11)で示される部材間の結合要素のばね定数は可変であり、 $k_x^c = 1.0 \times 10^{15}$ N/m、 $k_y^c = 1.0 \times 10^{15}$ N/m、 $K^c = 1.0 \times 10^{10}$ Nm/rad としている。2 番目主系の両端を基礎支持要素によって支持しており、左端はのばね定数は $\hat{k}_x = \hat{k}_y = 1.0 \times 10^{15}$ N/m、 $\hat{K} = 0$ Nm/rad、右端は鉛直方向を固定とし、 $\hat{k}_x = 1.0 \times 10^{15}$ N/m、 $\hat{k}_y = 1.0 \times 10^{15}$ N/m、 $\hat{K} = 0$ Nm/rad とする。ここで計算にあたり、比較する一般的な方法として、系全体の自由度を含む質量マトリックス M と剛性マトリックス K によって、振動数方程式

$$\det(K - \omega^2 M) = 0 \quad \dots\dots\dots(28)$$

から固有振動数を求める方法も同時に行う。これを便宜的に大マトリックス法 (Large Matrix Method : LMM) と呼ぶ。

解析モデルは、系の構造情報をモデルデータファイルとして作成して設定する。これを実行プログラムが読み込んで数値計算を行う。TICM, LMM とともに同じデータファイルを用いている。本章では一つの構造モデルに限定して数値計算を行っているが、その他の構造情報を含むデータファイルを用

Fig.8 Influence of rigidity of joint

いれば、他の構造物に対しても、一種類の実行プログラムで対応ができる。プログラムの汎用性という面でも問題なく作られている。

$N=7$ であるモデルの固有振動数を求める。自由度は219である。その際に n_x , n_y , n_θ を5~20の間で変化させる。ばね定数が大きくなると、結合が剛となり、ラーメン構造の近似となるため、解の確認として昨年度の研究⁽²⁾におけるラーメン構造による数値計算結果を比較の対象とする。TICMでは式(27)に、LMMでは式(28)に二分法を適用する。振動数 $f=\omega/2\pi$ が、初期振動数刻み0.1Hzで0.1~500Hz間を探索し、解を挟む振動数幅 Δf が $\Delta f/f < 10^{-10}$ を満たせば、その f を固有振動数とする。

結果を図8に示す。 $n_x=n_y=n_\theta$ として5~20まで変化させ、ラーメン構造として求めた解とどの程度の差があるかを相対誤差で示してある。ここでは一次の固有振動数のみにについて示す。

TICM, LMMを比較すると、TICMでは部材間の結合要素のばね定数が大きくなるにつれてラーメン構造の解に近づいており、 $n_x=n_y=n_\theta=17$ 以降では等しい値となっている。また、一次以外の解についても考えると、 $n_x=n_y=n_\theta=19$ を超えると得られるすべての解がラーメン構造の解と一致した。よって $n_x=n_y=n_\theta=19$ を入れることによってラーメン構造を再現することが可能であることがわかる。また、ピン接合とする場合には、 $n_x=n_y=19$ として、回転ばね定数 $K^\circ=0$ とすればよい。これに対し、LMMでは $n_x=n_y=n_\theta=14$ を超えると計算が不安定になり、ラーメン構造を再現することができない。また、結合がピン接合であるとする場合に x 方向および y 方向のせん断ばねを剛にする必要があり、LMMでは解を正しく得ることができないと考えられる。このことから、本報で示したアルゴリズムの有効性が示されたといえる。

次にピン接合を含むモデルに対して数値計算を行った結果を示す。部材間の結合要素のばね定数を $k_x=k_y=1.0 \times 10^{19}$,

Table 1 Natural frequencies

	Natural frequencies(Hz)		Natural frequencies(Hz)
1st	154.9890555	5th	200.5527907
2nd	157.016046	6th	232.2027208
3rd	158.2089681	7th	278.6838565
4th	158.3221642	8th	453.7139711

Table 2 Characteristic modes

$K=0$ としている。探索範囲において八次までの固有振動数を得た。LMMによって求めた解と一致しなかったが、上記の結果が関係していると考えられる。そこでLMMの4倍精度計算を行って比較したところ、12~13桁程度の一致をした。固有モードも7~10桁の一致が見られ、提案したアルゴリズムの精度が確認できた。また、計算時間はTICMで2353(ms)、LMMの4倍精度計算では337265(ms)であり、大きな差が見られた。得られた固有振動数を表1に、得られた固有振動数に対しての固有モードを表2に示す。

4. 結言

- (1) 同一平面内において、系がピン接合を介して分岐・結合を繰り返している二次元構造物に対して、伝達影響係数法を適用し、面内の縦・曲げ連成連成自由振動を対象としたアルゴリズムを示した。
- (2) 提案したアルゴリズムを用いると、ラーメン構造もピン接合も再現することができる。一般的な方法と比べて汎用性が大きく、さらに計算時間も大きく短縮することができるため、非常に有効であるということが示された。

文献

- (1) 北村弘, 大沢胖, トラス・ラーメン, (1966), 9-21, 彰国社
- (2) 井上卓見, 末岡淳男, 伝達影響係数法による二次元トラス構造物の面内自由振動解析, 機講論, No.02-9, (2002), 10