521 ティモシェンコ梁/ミンドリン板理論の新たな定式化の提案と振動数合成法への応用

Proposition of a New Formulation of the Timoshenko Beam/Mindlin Plate Theory and its Application to the Synthetic Method of Frequencies

正 遠藤 満 (東工大)

○ 木村 宣隆 (東工大 [院])

Mitsuru ENDO, Tokyo Institute of Technology, 2-12-1, O-okayama, Meguro-ku, Tokyo

Nobutaka KIMURA, Tokyo Institute of Technology

If we depend on the traditional formulation of the Timoshenko beam and Mindlin plate, the bending and shearing displacements cannot be determined uniquely. Hence, we propose a new formulation in which the total and bending displacements are regarded as the fundamental variables and it is verified that the both displacements can be determined uniquely and that the natural frequencies obtained are not coincident with those by the traditional method for some boundary conditions. In addition, the series-type synthetic method of frequencies becomes applicable in principle by the new method and so from the practical point of view, we show its effectiveness for fairly thick beams and rectangular plates.

Key Words : Timoshenko Beam, Mindlin Plate, the Fundamental Variable

A1. はじめに

ティモシェンコ梁, ミンドリン板理論の伝統的な定式化に基づく, 曲げ変位とせん断変位は一意的に定まらない. そこで, それらが一意的に定まる新たな定式化を提案する. また, 新たな定式化を直列結合型振動数合成法へ応用し, その有効性を示す. 以下, 紙数の関係で梁理論について主に記述する.

A2. 新たな定式化による運動方程式の導出

梁理論において, 伝統的な定式化では全体変位 w と曲げによる回転角 ϕ を基本的な変数とみなすが, この定式化によると全体変位 w と曲げによる回転角 ϕ は一意的に定まるが, 曲げ変位 w_b を求める際の積分定数が定まらない.

そこで, 新たな定式化として全体変位 w と曲げ変位 w_b を基本的な変数として, ハミルトンの原理により運動方程式と境界条件の式を導出すると, 式 (A1), (A2) のようになる.

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - k'GA \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \right) = 0 \\ \rho I \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} - EI \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - k'GA \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \right) = 0 \end{cases} \quad \dots (A1)$$

$$\begin{cases} \left[EI \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \cdot \delta \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} \right) \right]_0^\ell = 0 \\ \left[k'GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w_b}{\partial x} \right) \cdot \delta w \right]_0^\ell = 0 \\ \left[\left\{ \rho I \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial t^2} - EI \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - k'GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w_b}{\partial x} \right) \right\} \cdot \delta w_b \right]_0^\ell = 0 \end{cases} \quad \dots (A2)$$

ここで, x は梁の長さ方向座標, t は時間, ℓ は梁の長さ, μ , ρI は単位長さあたりの質量, 回転慣性, EI は曲げ剛性, $k'GA$ は修正せん断剛性を表す. また, δ は変分記号である.

平板理論については, 新たな定式化では全体変位 w と曲げ変位 w_b を基本的な変数にとる.

A3. 固有振動数の比較

長さ $\ell = 0.5[\text{m}]$ の梁, 及び寸法 $a = 0.8[\text{m}]$, $b = 0.5[\text{m}]$ の長方形平板に関し, 二つの定式化で最低次固有振動数を比較する. 材料はアルミニウムを仮定し, ヤング率 $E =$

68.6[GPa], ポアソン比 $\nu = 0.33$, 密度 $\rho = 2700[\text{kg}/\text{m}^3]$ として, 梁では一端単純支持・他端固定, 板では対辺単純支持・対辺固定の境界条件の下で計算を行った. その結果を図 A1, A2 に示す. 縦軸は固有振動数, 横軸は厚さを h として無次元厚さ h/ℓ , h/a である. このように新たな定式化の方がより大きい値を示すことが分かった.

Fig. A1 Natural frequencies of the Timoshenko beam Fig. A2 Natural frequencies of the Mindlin plate

A4. 梁理論のモード形状の比較

次に, $h/\ell = 0.5$ における一端単純支持・他端固定梁について二つの定式化のモード形状を比較する. 伝統的な定式化と新たな定式化のモード形状を図 A3, A4 に示す. 伝統的な定式化では w_b とせん断変位 w_s が上下に不定となっているのに対し, 新たな定式化ではそれらが一意的に定まっている. このことから新たな定式化の方がより一次せん断変形理論の物理的性質を満たしていると言える.

Fig. A3 Mode shapes by the traditional method Fig. A4 Mode shapes by the new method

A5. 結論

曲げ変位とせん断変位を一意的に定めることの出来る新たな定式化を提案し, 伝統的な定式化による解との比較を行い, 新たな定式化の妥当性を考察した. また, 新たな定式化を振動数合成法へ応用した.

1. 緒言

一次せん断変形理論はせん断変形を考慮した最も基本的な理論であり、曲げ剛性に比べ比較的せん断剛性が小さい構造物を対象とする際に有効な理論であって、現在その理論体系はほぼ確立されているといっても過言ではない。特にその梁、板理論に関して、一次せん断変形理論とは「変形前に中央面に垂直な断面は、変形後も平面を保つ」という仮定を置くことで知られている。

しかし、梁及び平板に関する一次せん断変形理論は、以下に記述するように、いわゆる高次せん断理論とは物理系との対応という観点においてその性質がやや異なる。一般の高次せん断変形理論では、厚さ方向座標 z に関する展開近似係数として現れる変数に関して支配方程式を立てるのが主流の考え方であるが、一次せん断変形理論をただそれらの理論的アプローチの範疇、すなわち、単に z の一次までの展開係数を取ったものとみなすことは妥当ではない。一次せん断変形理論では、二つの変数が物理的に何らかの意味を持つものである、と考える見方が歴史的にみて大勢を占める。つまり、二つの変数が梁、平板の曲げ変形とせん断変形という物理的実体と何らかの意味で対応するものであると捉えているということである。

一次せん断変形理論は、まず、静的な理論として誕生した。その後、Timoshenko によって動的な梁理論が、Mindlin によって板理論が提唱され現在に至っている。ここで特に梁の静的な理論に関しては、実質的には、全体の変位 w を曲げ変位 w_b 、せん断変位 w_s に分け、それらを独立に求めた上で、 w_b 、 w_s を足し合わせて w を求めている。例えば Donnell は梁のたわみを求める際に w_b 、 w_s を明確に区別し、単純支持の境界条件の一つとして $w_s = 0$ を用いている⁽¹⁾。また、Timoshenko 自身も曲げ変位とせん断変位を独立に求めている⁽²⁾。

動的な理論に関しては、そのように明示的に解析した文献は存在しないが、同様なことが言えると認識していると思われる文献が多数存在する^(3, 4, 5)。Jacobsen と Ayre は彼らの著書“Engineering Vibrations with Application to Structures and Machinery”において、ティモシェンコ梁理論を「曲げ変位とせん断変位が別々に求まり、そして両者を単純に加起来合わせれば全体変位が求まる、という仮定の上に立っている」と紹介している⁽⁵⁾。

しかし、実際には Timoshenko と Mindlin が提唱した方法のままでは、以下の章で示すように、曲げ変位 w_b とせん断変位 w_s を一意的に定めることは出来ない。彼らが提唱した方法とは、梁理論に関しては全体変位 w と曲げによる回転角 ϕ を基本的な変数とし、平板理論に関しては全体変位 w と曲げによる x 方向の回転角 ϕ_x 、曲げによる y 方向の回転角 ϕ_y を基本的な変数とする定式化のことであるが、ミンドリン板理論に関しては、曲げ変位 w_b とせん断変位 w_s を定義することさえ出来ない。このことから、従来のティモシェンコ梁、ミンドリン板理論の定式化では、静的な理論から始まった梁と平板に関する一次せん断変形理論の物理的性質を正確に捉えきれていないと言える。そこで、曲げ変位 w_b とせん断変位 w_s が一意的に定めることの出来る新たな定式化を確立する必要がある。

本研究では、それらが一意的に定める新たな定式化を提案することを主な目的とする。また、新たな定式化に基づけば、直列結合型振動数合成法⁽⁶⁾が適用可能となる。そこで、実用的な観点から比較的せん断剛性の小さな複合材料などを対象として、振動数合成法へ新たな定式化を応用し、その実用的有効性を確認する。

2. 伝統的な定式化とその問題点

ティモシェンコ梁理論に関し、伝統的な定式化では、全体変位 w と曲げによる回転角 ϕ を基本的な変数とみなす。今、ハミルトンの原理を用いて運動方程式、境界条件の式を導出すると、

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - k'GA \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = 0 \\ \rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - k'GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) = 0 \end{cases} \dots\dots (1)$$

$$\begin{cases} \left[EI \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \delta \phi \right]_0^\ell = 0 \\ \left[k'GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \cdot \delta w \right]_0^\ell = 0 \end{cases} \dots\dots (2)$$

となる。ここで、 x は梁の長さ方向座標、 t は時間、 μ 、 ρI は梁の単位長さあたりの質量と回転慣性、 EI 、 $k'GA$ は梁の曲げ剛性、修正せん断剛性を表す。また、 δ は変分記号である。このように、伝統的な定式化では、運動方程式2本、境界条件の式2本が得られる。

この式(1)、(2)から基本的な変数である w 、 ϕ は一意的に定めることが出来る。その際に現れる積分定数は4つであり、境界条件(2)を用いてその定数を決定する。

ここで、曲げ変位 w_b は曲げによる回転角 ϕ を x で積分することで得られるはずである。しかし、その際にもう1つ積分定数が現れるが、それを決定する条件がない。よって、曲げ変位 w_b は一意的に定まらないことになる。

次に、ミンドリン板理論に関する伝統的な定式化について説明する。板の直交する方向の二辺の座標を x 、 y とすると、基本的な変数として、全体変位 w 、曲げによる x 方向の回転角 ϕ_x 、曲げによる y 方向の回転角 ϕ_y をとる。ハミルトンの原理を用いて二辺の長さが a 、 b の長方形平板について運動方程式、境界条件の式を導くと次式が得られる。

$$\begin{cases} \mu' \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - k'Gh \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \phi_x}{\partial x} - \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) = 0 \\ \rho I' \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} - D \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} \right) - k'Gh \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi_x \right) = 0 \\ \rho I' \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} - D \left(\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2} \right) - k'Gh \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \phi_y \right) = 0 \end{cases} \dots\dots (3)$$

$$\begin{cases} \left[k'Gh \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi_x \right) \cdot \delta w \right]_0^a = 0 \\ \left[k'Gh \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \phi_y \right) \cdot \delta w \right]_0^b = 0 \\ \left[D \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \cdot \delta \phi_x \right]_0^a = 0 \\ \left[D \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) \cdot \delta \phi_y \right]_0^b = 0 \\ \left[\frac{1-\nu}{2} D \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \cdot \delta \phi_y \right]_0^a = 0 \\ \left[\frac{1-\nu}{2} D \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial x} + \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \right) \cdot \delta \phi_x \right]_0^b = 0 \end{cases} \dots\dots (4)$$

ここで、 μ' 、 $\rho I'$ は板の単位面積あたりの質量及び回転慣性、 D 、 $k'Gh$ は板の曲げ剛性、修正せん断剛性を表す。こ

のように、板理論において、運動方程式 3 本、境界条件の式 6 本が得られる。

この式 (3), (4) を解くと、基本的な変数である w , ϕ_x , ϕ_y が一意的に定まる。ここで、物理的には曲げ変位 w_b は曲げによる x 方向の回転角 ϕ_x , 曲げによる y 方向の回転角 ϕ_y を用いて次のような関係から得られるはずである。

$$w_b = \int_x \phi_x dx = \int_y \phi_y dy \quad \dots\dots\dots (5)$$

しかし、 ϕ_x , ϕ_y は別々の変数として定義されているため、式 (5) の右辺の等式が成り立たないことを示すことが出来る。そのため、ミンドリン板理論に関し、伝統的な定式化では曲げ変位 w_b は定義されないことになる。

以上のことより第 1 章で述べたように、梁、板理論の一次せん断変形理論において、曲げ変位、せん断変位が物理的に意味を持つと考え、ティモシェンコ梁、ミンドリン板両理論に関して伝統的な定式化では不十分であると言える。

3. 新たな定式化の提案

そこで、曲げ変位とせん断変位を一意的に定めることの出来る新たな定式化を提案する。

まず、ティモシェンコ梁に関して、全体変位 w と曲げ変位 w_b を基本的な変数にとる定式化を考える。ここで、曲げ変位 w_b と曲げによる回転角 ϕ の関係は、

$$\phi = \frac{\partial w_b}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (6)$$

である (4)。ハミルトンの原理を用いて運動方程式、境界条件の式を導出すると次式が得られる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - k'GA \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \right) = 0 \\ \rho I \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} - EI \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} \\ - k'GA \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \right) = 0 \end{array} \right. \quad \dots\dots (7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[EI \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \cdot \delta \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} \right) \right]_0^\ell = 0 \\ \left[k'GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w_b}{\partial x} \right) \cdot \delta w \right]_0^\ell = 0 \\ \left[\left\{ \rho I \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial t^2} - EI \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} \right. \right. \\ \left. \left. - k'GA \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w_b}{\partial x} \right) \right\} \cdot \delta w_b \right]_0^\ell = 0 \end{array} \right. \quad \dots\dots (8)$$

このように、運動方程式 2 本、境界条件の式 3 本となる。

伝統的な定式化と異なる点として、式 (1) の第 2 式をさらに x で微分したものが式 (7) の第 2 式となっている点、また、式 (8) の第 3 式が追加された点の 2 つが挙げられる。

式 (7), (8) を解くと、基本的な変数である全体変位 w と曲げ変位 w_b が一意的に定まる。せん断変位 w_s は $w = w_b + w_s$ の関係から求めることが出来る。

次に、ミンドリン板理論に関する新たな定式化を提案する。全体変位 w と曲げ変位 w_b を基本的な変数にとる定式化を考える。ここで、曲げ変位 w_b と曲げによる x 方向の回転角 ϕ_x , 曲げによる y 方向の回転角 ϕ_y の関係は次式で与えられるものとする。

$$\phi_x = \frac{\partial w_b}{\partial x}, \quad \phi_y = \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad \dots\dots\dots (9)$$

ハミルトンの原理から運動方程式と境界条件の式を導出

すると次式となる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu' \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - k'Gh \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) = 0 \\ \rho I' \left(\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^2 \partial t^2} \right) \\ - D \left(\frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} \right) \\ - k'Gh \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) = 0 \end{array} \right. \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[k'Gh \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w_b}{\partial x} \right) \cdot \delta w \right]_0^a = 0 \\ \left[k'Gh \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w_b}{\partial y} \right) \cdot \delta w \right]_0^b = 0 \\ \left[D \left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \right) \cdot \delta \left(\frac{\partial w_b}{\partial x} \right) \right]_0^a = 0 \\ \left[\left\{ \rho I' \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial t^2} - D \left\{ \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial y^2} \right\} \right. \right. \\ \left. \left. - k'Gh \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w_b}{\partial x} \right) \right\} \cdot \delta w_b \right]_0^a = 0 \\ \left[\left\{ \rho I' \frac{\partial^3 w_b}{\partial y \partial t^2} - D \left\{ \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^2 \partial y} \right\} \right. \right. \\ \left. \left. - k'Gh \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w_b}{\partial y} \right) \right\} \cdot \delta w_b \right]_0^b = 0 \\ \left[\left[2(1 - \nu) D \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \cdot \delta w_b \right]_0^a \right]_0^b = 0 \end{array} \right. \quad \dots\dots\dots (11)$$

このように、運動方程式 2 本、境界条件の式 7 本となる。

また、伝統的な定式化と比較すると、式 (3) の第 2 式を x で微分したものと第 3 式を y で微分したものを足し合わせたものが式 (10) の第 2 式となっており、式 (4) の第 5, 6 式に対応する式がなくなり、式 (11) の第 5~7 式が代わりに加わっている。

式 (10), (11) を解くと、基本的な変数である w と w_b が一意的に定まり、また、せん断変位 w_s は $w = w_b + w_s$ の関係から求める。

以上の議論から、ティモシェンコ梁、ミンドリン板両理論に関して曲げ変位 w_b とせん断変位 w_s を一意的に定め、それらの足し合わせが全体変位 w となる新たな定式化を提案することが出来た。

4. 二つの定式化の比較

4.1 固有振動数の比較 本節では、伝統的な定式化と新たな定式化でそれぞれ最低次固有振動数を求め、それらの比較を行う。

まず、梁理論に関して、長さ $\ell = 0.5[\text{m}]$ であるアルミニウムの梁を考える。ここで、材料定数はヤング率 $E = 68.6[\text{GPa}]$, ポアソン比 $\nu = 0.33$, 密度 $\rho = 2700[\text{kg/m}^3]$ とした。梁の厚さ h を変化させることで、様々な境界条件で二つの定式化の比較を行った。すると一端単純支持・他端固定の境界条件において固有振動数に違いが生じた。その結果を図 1, 2 に示す。図 1 において、縦軸は固有振動数、横軸は無次元厚さ h/ℓ , 図 2 において、縦軸は伝統的な定式化による振動数を基準とした新たな定式化による結果の差 [%], 横軸は無次元長さ h/ℓ である。

これらの図から、ティモシェンコ梁において、固有振動数は新たな定式化の方が大きくなることが分かった。また、梁の厚さを厚くしていくとその差が顕著に現れることがわかった。

Fig. 1 Natural frequencies of the Timoshenko beam (SC)

Fig. 3 Natural frequencies of the Mindlin plate (SCSC)

Fig. 2 Frequency difference of the new method from the traditional one (Timoshenko beam)

Fig. 4 Frequency difference of the new method from the traditional one (Mindlin plate)

次に、ミンドリン板理論に関して二つの定式化の比較を行う。材料は先ほどと同様にアルミニウムを仮定し、寸法 $a = 0.8[\text{m}]$ 、 $b = 0.5[\text{m}]$ である長方形平板を考える。梁理論と同様に解析解が得られる様々な境界条件において、最低次固有振動数の比較を行った。すると、板理論においては多くの境界条件で固有振動数が異なることを確認出来た。

ここで、 $x = 0$ 、 $y = 0$ 、 $x = a$ 、 $y = b$ の辺の番号をそれぞれ、1, 2, 3, 4 とする。また、単純支持、固定、自由の境界条件を S, C, F で表し、辺の番号の順番に境界条件の記号を当て、板の境界条件を示すことにする。例えば、 $x = 0$ で単純支持、 $y = 0$ で固定、 $x = a$ で単純支持、 $y = b$ で自由という境界条件を SCSF で表すことにする。

その結果を図 3, 4 に示す。図 3 には SCSC (対辺単純支持・対辺固定) の結果のみを載せており、縦軸は固有振動数、横軸は無次元厚さ h/a である。また、図 4 において、縦軸は伝統的な定式化による振動数を基準とした新たな定式化による結果の差 [%]、横軸は無次元厚さ h/a である。

これらの図から、梁理論と同様、新たな定式化の方が大きい値を示すことが分かる。また、境界条件によって二つの定式化の差の大きさは異なるものの、梁のある厚さでピークを持つという傾向があることが分かった。

以上の議論から、ティモシェンコ梁、ミンドリン板両理論に関して、二つの定式化においてある境界条件の下では固有振動数に違いが生じる、という結論が得られた。

4.2 梁理論に関するモード形状の比較 次に、ティモシェンコ梁理論に関し、二つの定式化におけるモード形状を比較する。固有振動数に違いが生じた一端単純支持・他端固定梁について、先ほどと同様の梁を用いて、無次元厚さ $h/l = 0.5$ としたときの全体変位 w 、曲げ変位 w_b 、せん断変位 w_s のモード形状 W 、 W_b 、 W_s を比較する。図 5, 6 にそれぞれ、伝統的な定式化、新たな定式化のモード形状を示す。

図 5 を見ると、伝統的な定式化では、曲げ変位 w_b 、せん断変位 w_s は一意的に定まっておらず、グラフ上では W_b 、 W_s が $W = W_b + W_s$ を満たすように、上下に不定となる。また、そのことを考えずとも、 W_b 、 W_s は両端の位置が一致しないなど不可解な形状を示しているのが分かる。それに対し、新たな定式化の解を示す図 6 について、 W_b 、 W_s は両端が 0 となるように一意的に定まっている。またそれらの形状は、それぞれ、曲げ変形のみを考慮したオイラー＝ベルヌーイ梁、せん断変形のみを考慮した梁の形状に似ている。

このように、二つの定式化においてモード形状が異なることを確認した。また、新たな定式化では曲げ変位とせん断変位がそれぞれ一意的に定まり、全体変位がそれらの和で表されるという一次せん断変形理論の物理的性質をより明確に示すモード形状となることを確認した。

Fig. 5 Mode shapes of the traditional method (SC)

Fig. 6 Mode shapes of the new method (SC)

5. 振動数合成法への応用

5.1 直列結合型振動数合成法⁽⁶⁾ 新たな定式化によるティモシェンコ梁、ミンドリン板理論について、回転慣性を考慮しない場合、直列結合型振動数合成法が原理的に適用可能となる。つまり、曲げ変形のみを考慮したオイラー＝ベルヌーイ梁による固有角振動数を p_b 、せん断変形のみを考慮した梁による固有角振動数を p_s 、新たな定式化によるティモシェンコ梁の固有角振動数を p としたとき、次式が成り立つ。

$$\frac{1}{p^2} \approx \frac{1}{p_a^2} = \frac{1}{p_b^2} + \frac{1}{p_s^2} \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここで、 p_a は振動数合成法による解である。

また、 p_b 、 p_s 、 p が最低次固有振動数の場合、 p_a は p の下界を与えることが示されている。

5.2 等方性材料への応用 まず、等方性材料について振動数合成法を適用する。梁、板の寸法、材料定数等は先ほどと同様のものを考える。

等方性材料についての振動数合成法の適用結果について、図7、8にそれぞれ梁、板の結果を示す。ここで、図7について、両端の境界条件を先ほどと同様の記号で表現している。また、縦軸は p を基準とした p_a の誤差 [%] を表し、横軸は無次元厚さ h/ℓ 、 h/a である。 p_a が p の下界を与えていることは値がマイナスであることがより分かる。

図7の境界条件においては p_a が p の下界を与えること

Fig. 7 Synthetic method of frequencies for the Timoshenko beam

Fig. 8 Synthetic method of frequencies for the Mindlin plate

を確認した。また、 $h/\ell < 0.8$ について誤差は 1% 未満となり、等方性梁について振動数合成法が実用的に有効であることが確認できる。

板理論に関しては、解析解が得られる全ての境界条件について、 p_a が p の下界を与える事を確認した。また、 $h/a < 0.5$ で誤差は 1% 未満となり、等方性平板についても振動数合成法が実用的に有効であると言える。

5.3 複合材料への応用 せん断剛性が曲げ剛性に対して相対的に小さい複合材料からなる梁、平板に関して、一次せん断変形理論はその解析に有効であると考えられる。そこで、異方性材料である複合材料について、振動数合成法の有効性を確認する。

材料には CFRP を仮定し、梁および板の寸法は先ほどと同様なものを考える。CFRP の材料定数を表1に示す。こ

Table 1 Material parameters of CFRP

E_1	181[GPa]	G_{12}	7.17[GPa]	ν_{12}	0.28
E_2	10.3[GPa]	G_{23}	3.72[GPa]	ν_{23}	0.386
E_3	10.3[GPa]	G_{31}	7.17[GPa]	ν_{13}	0.28
ρ	1550[kg/m ³]				

こで、添え字 3 は梁、板の厚さ方向の材料定数を示し、添え字 1 が繊維強化方向、添え字 2 はそれらに直交する方向

を表す。また、添え字 1 と x 方向が一致している場合の積層角を 0° とする。積層は梁、板共に中央面対称で $/90^\circ/-45^\circ/45^\circ/0^\circ/$ の 8 層構造である。

まず、梁に関して、新たな定式化のティモシェンコ梁の解析解を基礎に振動数合成法を適用した。その結果を図 9 に示す。縦軸は解析解に対する振動数合成法の誤差 [%]、横軸は無次元厚さ h/l である。等方性材料の場合と同様な結

Fig. 9 Error of the synthetic method for the CFRP beam

果が得られ、振動数合成法が複合材厚肉梁に関しても実用的に有効であるという結果が得られた。

次に、板理論についてであるが、 p_b , p_s , p の解析解が厳密には得ることが出来ない。そこで、 p_b , p_s に関してはレーリー商による近似解を用い、ミンドリン板の解 p に関しては有限要素法汎用ソフト ANSYS にて求めることを考える。つまり、有限要素法によって得られた p を基礎にレーリー商による p_b , p_s を用いて振動数合成法の誤差を検討する。ここで、レーリー商に用いる近似関数には梁の解析解を用いている。また、有限要素法について、要素は 8 節点四角形シェル要素を用い、分割数は 900 とした。また、一つ断っておくが、本来ならば新たな定式化に基づく有限要素法の解を基礎にしなければならないが、今回は伝統的な定式化に基づく有限要素法の解を基礎としている。

その結果の例を図 10, 11 に示す。縦軸は固有振動数、横

Fig. 10 Natural frequencies of the CFRP plate (CCCC)

軸は無次元厚さ h/a である。ここで、レーリー商を用いた振動数合成法を簡易計算法 (Easy method) と呼んでいる。

Fig. 11 Natural frequencies of the CFRP plate (CFCF)

曲線が簡易計算法の解、プロット点が有限要素法の結果である。図 10, 11 を見て分かる通り、簡易計算法の解が有限要素法の解とよく一致しているのが分かる。他の境界条件についても良い近似となっていることを確認した。よって、複合材厚肉平板についても振動数合成法が実用的に有効であると言える。

6. 結言

ティモシェンコ梁、ミンドリン板理論において、伝統的な定式化では曲げ変位とせん断変位が一意的に定まらないことを示し、それらを一意的に定めることの出来る新たな定式化を提案した。また、二つの定式化においてある境界条件では固有振動数が異なることを示し、梁理論についてモード形状を比較することで新たな定式化の妥当性を示した。

次に、実用的な観点から、振動数合成法へ新たな定式化の解を適用し、その有効性を確認した。

文 献

- (1) Donnell, L. H. , J. Appl. Mech. , Discussion, Vol. 67(1945), A69-A77.
- (2) Timoshenko, S. , Strength of Materials, (1930), 170, Van Nostrand Reinhold Com.
- (3) Davidson, T. , et al. , Proc. SESA, Vol. 4(1946), 106-107.
- (4) Anderson, R. A. , J. Appl. Mech. , Vol. 20, No. 4(1953), 504-510.
- (5) Jacobsen, L. S. and Ayre, R. S. , Engineering Vibrations, (1958), 498, McGraw-Hill.
- (6) 遠藤・谷口, 機論, C40-338, (1974), 2805-2813.