709 振り子式動吸振器による傾斜振動系の制振

Vibration Control of Tilted Vibration System by Pendulum Type Dynamic Vibration Absorber

○正 宋 義林(金沢大)

正 佐藤秀紀(金沢大)

正 岩田 佳雄(金沢大)

正 小松崎 俊彦(金沢大)

Yilin SONG, Kanazawa University, 40-20 Kodatsuno 2 chome, Kanazawa, Ishikawa 920-8667

Hidenori SATO, Kanazawa University

Yoshio IWATA, Kanazawa University

Toshihiko KOMATSZAKI, Kanazawa University

The vibration of a spring-mass-damper tilted vibration system with one pendulum hinged to the mass under excitation is investigated. The ratio of natural frequency of the pendulum to main system and the damping coefficient are considered as main parameters. The method of numerical calculation is used to evaluate the system response. The results of calculation show that the vibration suppression effects can be obtained at wide range of the ratio of natural frequency of the pendulum to that of main system, besides the parametrically exciting point and dynamically resonating point, but they are changed with the ratio and different tilted angles. The optimum vibration suppression effects under different ratio of nature frequency and tilted angle and correspondent damping coefficients are obtained.

Key words: Vibration control, Pendulum, Dynamic vibration absorber, Autoparametric system

本論文は振り子式動吸振器を用いた傾斜振動系の制振特性を検討したものである。論文では、数値計算手法を用いて、振り子と主系の固有振動数の比を 0.5~1 の間に变化させ、主系の最適制振条件を明らかにすると共に、各傾斜角における最適制振パラメータを求めた。

Fig.A1 Tilted vibration system with a pendulum type dynamic vibration absorber

図 A1 のような振り子式動吸振器を持つ 2 自由度傾斜振動系の無次元運動方程式は式 (A1), (A2) で表せる。

$$u'' + \frac{2\zeta}{1+\lambda}u' + \frac{1}{1+\lambda}u + \frac{\lambda}{q(1+\lambda)}(\theta'' \sin(\theta + \alpha) + \theta'^2 \cos(\theta + \alpha)) = \frac{1}{(1+\lambda)}\cos z\tau \quad (A1)$$

$$\theta'' + 2\zeta_p p \theta' + p^2 \sin \theta + \mu q u'' \sin(\theta + \alpha) = 0 \quad (A2)$$

ここに、 u, θ はそれぞれ主系と振り子の無次元変位と角変位であり、 λ, p, q, ζ_p はそれぞれ振り子と主系の質量比、固有振動数の比、主系ばねの静的変位と振り子の長さの比、振り子の減衰比である。

R.K.G 法による数値解析では、 $\alpha = 0^\circ$ の時、当然であるが振り子のパラメトリック励振が主系の垂直方向の制振に主な役割を果たす。しかし、固有振動数の比 p はパラメトリック励振 ($p=0.5$) から少しずれると、制振効果が急に悪化する。また、パラメトリック励振の狭い領域以外では、振り子が発

振しにくくなる。一方、 $\alpha = 90^\circ$ の時、振り子が通常の動吸振器に対応するため、振り子が主系と同じ周波数で振動し、固有振動数の比 p の広い範囲で制振効果が得られやすくなる。また、 α は $0^\circ, 90^\circ$ でない傾斜振動系の場合は、パラメトリック励振と共振の成分が同時に振り子の振動に与えるので、振り子の振動パターンと制振効果が傾斜角 α 、固有振動数の比 p と振り子の減衰比 ζ_p に依存する。本論文では、傾斜角 $\alpha = 0^\circ \sim 90^\circ$ において、固有振動数の比 p と振り子の減衰比 ζ_p の変動による主系の最適制振を検討した。

Fig.A2 The optimum vibration suppression effects of main system under different ratio of nature frequency and correspondent damping coefficients

1. はじめに

重力軸方向に振動系に対して、パラメトリック励振を利用した振り子を付加することにより制振を行なう手法について、これまで多くの報告がある^[1-4]。一方、重力軸方向に直角に振動する振動系に対し、共振を利用した振り子を付加することにより制振を行なう手法は通常の動吸振器に対応する。しかし、振動系がある角度で傾斜すると、振り子式動吸振器はその傾斜振動系に適用できるかどうか、まだ解明されていない。われわれは、これまで、その傾斜振動系について、単振り子の場合、振り子と主系の固有振動数の比をそれぞれ0.5(パラメトリック励振型)と1(共振型)と固定した場合の系の制振特性と二種類の振り子式動吸振器の適用範囲を数値的に調べた^[5]。

本研究では、ばね-質量1自由度の傾斜振動系において、付加した振り子の固有振動数と主系の固有振動数の比を0.5~1の間に变化させ、系の制振特性の変動、各傾斜角における最適制振効果及びそれに対応する最適パラメータを解明することを目的とする。

2. 運動方程式

図1には傾いた1自由度ばね-質量系に振り子を付加した単振り子式動吸振器系を示す。 m, k, c は主系の質量、ばね定数、粘性減衰係数、 m_p, c_θ, J, l は振り子系の質量、減衰係数、支点に対する慣性モーメント、支点から重心Gまでの距離であり、 α は主系の運動方向と垂直方向との角度である。

Fig. 1 Tilted vibration system with a pendulum type dynamic vibration absorber

系の運動方程式は

$$(m + m_p)\ddot{x} + c\dot{x} + kx + m_p l \ddot{\theta} \sin(\theta + \alpha) + m_p l \dot{\theta}^2 \cos(\theta + \alpha) = F \cos \alpha t \quad (1)$$

$$J\ddot{\theta} + c_\theta \dot{\theta} + m_p l g \sin \theta + m_p l \ddot{x} \sin(\theta + \alpha) = 0 \quad (2)$$

ここで、 x は主系の変位、 θ は振り子の角変位である。方程式(1)、(2)は無次元化すると次式になる。

$$u'' + \frac{2\zeta}{1+\lambda}u' + \frac{1}{1+\lambda}u + \frac{\lambda}{q(1+\lambda)}(\theta'' \sin(\theta + \alpha) + \theta'^2 \cos(\theta + \alpha)) = \frac{1}{(1+\lambda)} \cos z \tau \quad (3)$$

$$\theta'' + 2\zeta_p p \theta' + p^2 \sin \theta + \mu q u'' \sin(\theta + \alpha) = 0 \quad (4)$$

ここに

$$2\varepsilon = c/m, \quad \omega_n^2 = k/m, \quad \lambda = m_p/m$$

$$\omega_p^2 = m_p g l / J, \quad \mu = m_p l^2 / J, \quad 2\varepsilon_p = c_\theta / J$$

$$x_{st} = F/k, \quad u = x/x_{st}, \quad p = \omega_p / \omega_n$$

$$z = \omega / \omega_n, \quad q = x_{st} / l, \quad \zeta = \varepsilon / \omega_n$$

$$\zeta_p = \varepsilon_p / \omega_p, \quad \tau = \omega_n t$$

また、式(3)、式(4)における $(\cdot)$ は τ による微分を表す。

3. 固有振動数の比の変化による系の制振特性

本論文では、傾斜振動系の傾斜角 $\alpha = 0^\circ \sim 90^\circ$ において、振り子と主系の固有振動数の比を0.5~1とすこしづつ変化させて、振り子の振動による主系の制振特性を数値的に調べた。

固有振動数の比 p における主系の最適制振及びそれに対応する振り子の最適減衰比 ζ_p を求めるために、主系の定常振動の応答振幅 U を、共振前後の外力周波数幅に渡って二乗平均したもの $(\bar{U})$ を最小にすることを考えた。すなわち、

$$\bar{U}(\zeta_p, \lambda, q, z) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_i U_i^2} \rightarrow \min \quad (5)$$

ここに、 n は共振周波数前後(共振点から ± 0.15)の計算周波数点の数である。

計算では、式(3)、式(4)を用いて、R.K.G法により数値的に応答を求めた。応答の最初の3000周期をカットした後の u, θ の定常振幅 U, Θ を求め、そして共振前後の外力周波数幅に振幅の二乗平均を算出して表示した。

3.1 傾斜角 $\alpha = 0^\circ$ の場合

傾斜角 $\alpha = 0^\circ$ の場合、 $p = 0.5$ としたとき、パラメトリック励振の条件を満たすので、それについては多くの研究が行なわれている。しかし、固有振動数の比 p は0.5からずれると、主系の制振効果にどのような影響を与えるか、また、パラメトリック励振に適用する p の領域について、理論的、実用的に研究する必要があると思われる。

図2には $\alpha = 0^\circ$ 、 p の値を0.5~1と変動させた場合の主系の最適制振および最適減衰を示す。図にa)は各固有振動数の比 p における主系応答振幅の二乗平均の最小値、b)はa)に対応する振り子の最適減衰比を表す。

図a)の主系の最適制振効果を見ると、パラメトリック励振の条件 $p = 0.5$ では、振り子の振動により p の全領域に最適制振が得られることがわかる。しかし、 p はパラメトリック励振の条件($p = 0.5$)から少しずれると、主系の制振効果が急に悪くなることが見られた。また、 p の増大に従い、ある p の値では、振り子が全く振動しなく、主系に対する制振効果がなくなることがわかる。しかし、振り子の振動はそれからずっと中止を続けていくことではなく、 $p = 1$ に近づくと、振り子のパラメトリック励振が再び起こり、ある程度の制振効果が得られることがわかる。

図b)から、図a)の最適制振効果に対応する最適減衰比がわかる。 p が0.5から大きくなると、 ζ_p がともに大きくなる。これは、外力が一定とすれば、 p が大きくなると、すなわち振り子の固有振動数が大きくなると、振り子の長さを短くしなければならぬので、 q_p が大きくなるわけである。ここで、 $q_p = 4q \times p^2$ 、 q は $p = 0.5$ 時の値である。したがって、主系と振り子の定常振動を得るために、減衰比 ζ_p が増大することになる。しかし、 p がパラメトリック励振点($p = 0.5$)からさらにずれていくと、パラメトリック励振の条件が弱くな

るため、減衰が急に小さくなる現象が見られた。

Fig. 2 The optimum vibration suppression effects of main system and correspondent damping coefficients at $\alpha = 0^\circ$

図3を一例として、各固有振動数の比 p で振り子の振動パターンを示す。ここで、 $p=0.5$ 時の $q=0.02$, $z=0.95$ である。図3から、 $p=0.5$ の周辺で主系の2倍周期のパラメトリック励振、 $p=1$ の周辺で主系と同じ周期のパラメトリック励振が起こることが見られた。このことから、傾斜角 $\alpha=0^\circ$ 、固有振動数の比 $p=1$ の付近において、減衰があっても、振り子のパラメトリック励振が発生できることが確認された。

Fig. 3 The vibration patterns of pendulum under different p at $q=0.02$, $z=0.95$

3.2 傾斜角 $\alpha=30^\circ$ の場合

図4に傾斜角 $\alpha=30^\circ$ の場合、計算した主系の最適制振及びそれに対応する振り子の最適減衰比を示す。

図4を見ると、まず図a)から固有振動数の比 p の0.5~1の全領域において、振り子の発振による主系の制振をできることがわかる。 $p=0.5$ の付近で、 $\alpha=0^\circ$ の場合と同じようにパラメトリック励振の条件から少しずれると、制振効果が急に小さくなるが見られるが、しかし、励振力の増大にしたがってその減少は緩やかになることがわかる。これは励振力の増大により振り子が発振しやすくなり、制振効果が大きくなると思われる。また、最適制振曲線を見ると、パラメ

トリック励振が終わるところはちょうど制振効果が一番小さいところである。一方、 $p=1$ の付近で、振り子の共振が発生するため、通常の動吸振器の通りにかかなりの制振効果があることが見られた。制振曲線の全体を考察すると、系の最適制振点はパラメトリック励振が起こる $p=0.5$ のところであることがわかる。

また、図b)の振り子の最適減衰比を見ると、パラメトリック励振点の $p=0.5$ では、減衰比 ζ_p の値が一番小さい。その後、 p の増大に従い ζ_p もやや増大する。しかし、ある p の値では、 ζ_p が急に大きくなる跳び現象が出てくる。また、この ζ_p に対応する主系の最適制振はちょうど一番小さいところである。したがって、この p は振り子のパラメトリック励振による振動からダイナミック共振による振動を変換する点であることが考えられる。その後の ζ_p は p の増大に従い除々に小さくなる。

Fig. 4 The optimum vibration suppression effects of main system and correspondent damping coefficients at $\alpha = 30^\circ$

図5に減衰比 ζ_p の跳び現象が起こる $q=0.015$, $p=0.575, 0.6$, $\zeta_p=0.15, 0.57$ の時の振り子の振動パターンを示す。また、 $q=0.015$, $p=0.6$ では、各減衰比 ζ_p における主系の応答を図6に示す。

図5より、 $q=0.015$ において、振り子の振動は $p=0.575$, $\zeta_p=0.15$ で、パラメトリック励振、 $p=0.6$, $\zeta_p=0.57$ で、ダイナミック共振であることがわかる。また、 $q=0.01$ と $q=0.02$ の場合は $q=0.015$ と同じであるので、図4の減衰比 ζ_p の跳び現象は、振り子の振動パターンの変化により起こることが確認された。

図6に $p=0.6, q=0.015$ では、主系の制振効果は振り子の減衰比 ζ_p により変動する傾向を示す。 $\zeta_p < 0.155$ 時、振り子と主系が同時に非定常振動が起こる。また、 $\zeta_p=0.155$ 時、振り子の定常的なパラメトリック励振振動になるため、かなりの制振効果が得られる。しかし、 ζ_p が大きくするに連れて、パラメトリック励振が弱くなり、制振効果が小さくなる。 $\zeta_p=0.205$ では、制振効果の最小値にいたる。その後、ダイナミック共振の成分が強くなり、振り子に支配する振動はパラメトリック励振から共振に変わり、 $\zeta_p=0.57$ では、振り子の共振により、最大制振効果が求められる。

図7に図6の制振曲線のa, b, c, d各位置の振り子の振動パターンを示す。図7から、減衰比 ζ_p の増大にしたがって、振り子の振動はパラメトリック励振から共振にだんだん変わっていき、振幅はだんだん小さくなることわかる。

Fig. 5 The vibration patterns of pendulum under different p and ζ_p at $q=0.015$, $z=0.96$

Fig. 6 The vibration suppression effects of main system under different ζ_p at $p=0.6$, $q=0.015$ and $\alpha=30^\circ$

Fig. 7 The vibration patterns of pendulum under different ζ_p at $p=0.6$, $q=0.015$, $z=0.96$ and $\alpha=30^\circ$

Fig. 8 The optimum vibration suppression effects of main system under different p at $\alpha=30^\circ$

図8に最適制振の条件において、 $p=0.5, 0.7, 1$ のときの主系の応答曲線を示す。図により、異なる p では、振り子の振動パターンが違うが、応答曲線の形には大きい違いがなく、基本的に振り子が系の共振点の付近で発振することがわかる。

3.3 傾斜角 $\alpha=60^\circ$ の場合

図9に傾斜角 $\alpha=60^\circ$ の場合、計算した主系の最適制振及びそれに対応する振り子の最適減衰比 ζ_p を示す。

Fig. 9 The optimum vibration suppression effects of main system and correspondent damping coefficients at $\alpha=60^\circ$

図9を図4と比べると、傾斜角 $\alpha=60^\circ$ の場合は主系の最適制振に対して、パラメトリック励振の影響は小さくなることわかる。 $p=0.5$ の付近では、振り子のパラメトリック励振が起こるが、最適制振が得られにくくなる。一方、共振振動が、 p における最適制振が得られやすくなる。また、各 p において、最適制振効果は図4のような激しい変化を見らず、緩やかに変動することがわかる。

図b)の減衰比 ζ_p に関するグラフを見ると、傾斜角 $\alpha=30^\circ$ の場合とは違って、跳び現象が見られなかった。これは傾斜角が大きくなると、パラメトリック励振の成分が小さく、共振振動の成分が大きくなるので、 $p=0.5$ 付近でも、主系の最適制振に支配する振り子の振動は共振振動であると考えられる。

3.4 傾斜角 $\alpha=90^\circ$ の場合

図10に傾斜角 $\alpha=90^\circ$ の場合、計算した主系の最適制振及びそれに対応する振り子の最適減衰比 ζ_p を示す。

図a)を見ると、 p の全領域に良い制振効果が得られることがわかる。式(4)の振り子の運動方程式において、振り子が小振幅で振動することを仮定すれば、式(4)は式(6)になる。

$$\theta'' + 2\zeta_p p \theta' + p^2 \theta = -\mu q u'' \quad (6)$$

したがって、そのときの振り子はパラメトリック励振系ではなく、単純な強制振動系である。また、振り子の振動は主系の振動加速度に依存するので、通常の動吸振器に対応すると考えられる。したがって、 $p=1$ の付近では、最適な制振効

果が得られ、共振点と離れるに連れて、制振効果がやや小さくなっていく傾向が見られる。傾斜角 α の全体を見ると、 $\alpha = 90^\circ$ では、他の傾斜角に比べて、制振効果が一番いいと言える。

また、図 b)を見ると、その場合はパラメトリック励振の成分がなくなるため、最適減衰比 ζ_p の跳び現象が出てこなく、 $p=0.5$ 時の ζ_p が一番大きい、その後 p の増大に従い徐々に小さくなることがわかる。

Fig. 10 The optimum vibration suppression effects of main system and correspondent damping coefficients at $\alpha = 90^\circ$

Fig. 8 The optimum vibration suppression effects of main system under different p at $\alpha = 90^\circ$

図 11 に最適な制振条件において、 $p=0.5, 0.7, 1.0$ のときの主系の応答曲線を示す。その時の振り子が主系と同じ周波数で振動し、通常の動吸振器のような 2 自由度系になっている。 $p=0.5, 0.7$ では、振り子の共振振動によるかなり制振効果があるが、振り子と主系の固有振動数がずれるため、 $p=1.0$ 時のような最適制振効果が得られなかった。また、図 8 と比べて、傾斜角による最適制振条件が変わることがわかる。

3.5 全傾斜角の制振

図 12 に以上の各傾斜角で求めた主系応答の最小値 $\bar{U}$ を示す。 $\bar{U}$ の最小値を見ると、傾斜角が小さい時はパラメトリック励振型振り子が有効、大きい場合は共振型振り子が有効

であることがわかる。具体的に言うと、傾斜振動系の傾斜角は垂直位置から 30° 以内であれば、パラメトリック励振型振り子式動吸振器を選び、傾斜角は 30° を超えれば、共振型振り子式動吸振器を選ぶことにより、傾斜振動系についての制振を向上させることが可能である。また、図 12 から、 q の増大に従いパラメトリック励振型振り子の適用範囲は広くなり、共振型振り子の適用範囲は狭くなることがわかる。

Fig. 12 The minimum value of response of main system under different angle α

4. 結 言

以上、本研究で得られた結果を要約すると、

- 1) 1 自由度のばね一質量傾斜振動系において、振り子式動吸振器を付ける場合の主系の制振特性を、数値的に明らかにし、各傾斜角では固有振動数の比の変動により最適制振効果及びそれに対応する最適減衰比を求めた。
- 2) $p=0.5$ 付近の振り子のパラメトリック励振では、固有振動数の比が少しずれると、主系の制振に大きい影響を与えるのに対し、 $p=1.0$ 付近の振り子の共振では、固有振動数の比の変動は主系の制振に敏感に影響しなくなり、 p のある範囲に最適値が得られやすくなる。また、主系の最適制振に対応する最適減衰比に跳び現象が見られた。これは振り子の振動パターンが、パラメトリック励振から共振型へ変換することにより生じたものと考えられる。
- 3) 傾斜振動系の傾斜角は垂直位置から 30° 以内であれば、パラメトリック励振型振り子式動吸振器($p=0.5$)が有効であり、傾斜角が 30° を超えれば、共振型振り子式動吸振器($p=1.0$)が有効であることが確認された。

文 献

- (1) Haxton, R.S. and Barr, A.D.S, The autoparametric vibration absorber, Trans. ASME, *J. Eng. Ind.* **94** (1972), 119-125.
- (2) Bajaj, A.K, Chang, S.I. and Johnson, J.M., Amplitude modulated dynamics of a resonantly excited autoparametric two degree-of-freedom system, *Nonlinear Dynamics*, **5** (1994), 433-457.
- (3) 宋義林, 佐藤秀紀, 岩田佳雄, 小松崎俊彦, 振り子のパラメトリック励振を利用した動吸振器系の応答, 機論, **67**-611, C(2001), 2763-2769.
- (4) Song, Y., Sato, H., Iwata, Y. and Komatsuzaki, T., The response of dynamic vibration absorber system with a parametrically excited pendulum, *J. Sound Vib* **259**(2003), 747-759
- (5) 宋義林, 佐藤秀紀, 岩田佳雄, 小松崎俊彦, 傾いた振り子式動吸振器系の応答, 第 2 回ダンピングシンポジウム講演論文集(2002), 331-336.