260 非線形ばねで支持された粘弾性ブロックの振動減衰特性の有限要素解析

Vibration Analysis of Damping Properties for a Viscoelastic Block Supported by a Nonlinear Spring Using FEM

正 山口 誉夫 (群馬大) ○ 学 斉藤 友明 (群馬大)
 正 永井 健一 (群馬大) 正 丸山 真一 (群馬大)
 正 黒沢 良夫 (富士重工) 正 松村 修二 (富士重工)

Takao YAMAGUCHI, Gunma University, 1-5-1 Tenjin-cho, Kiryu-shi, Gunma
 Tomoaki SAITO, Gunma University
 Ken-ichi NAGAI, Gunma University
 Shinichi MARUYAMA, Gunma University
 Yoshio KUROSAWA, FUJI HEAVY INDUSTRIES
 Shuji MATSUMURA, FUJI HEAVY INDUSTRIES

This paper describes vibration analysis using finite element method for a viscoelastic block supported by a nonlinear concentrated spring. The restoring force of the spring has cubic nonlinearity and linear hysteresis damping. Finite element for the nonlinear spring is expressed and is connected to the viscoelastic block modeled by linear solid finite elements in consideration with complex modulus of elasticity. Further, the discretized equations in physical coordinate are transformed into the nonlinear ordinary coupled equations using normal coordinate corresponding to linear natural modes. This transformation yields computation efficiency. Influences of share of dissipated energy on nonlinear frequency responses for the viscoelastic block are clarified.

Key Words : Computer Aided Analysis, Finite Element Method, Nonlinear Vibration, Vibration of Continuous System, Damping

A 1. 緒言

線形ヒステリシス減衰を有する非線形集中ばねで支持された粘弾性ブロックの動的応答を解析した。集中ばねの有限要素を定式化し、ブロックの離散化方程式と接合した。運動方程式を、線形固有振動形を基準座標とする三次の非線形連立常微分方程式に変換し、計算自由度を縮小した。

A 2. 解析モデル

非線形集中ばねを接続した粘弾性ブロックのモデルを図A1に示す。図中の剛なガイドを設置し、ブロックのガイド面に法線方向の運動を拘束した。集中ばねは、三次の非線形復元項を有する漸硬ばねとした。この特性に線形ヒステリシス減衰を与え計算した。

A 3. 基礎式

図A1のような粘弾性ブロック-非線形集中ばね系の有限要素による離散化方程式を求める。物理座標系の離散化方程式を、線形固有振動形 $\{\phi^{(i)}\}$ に対応する基準座標 $\bar{b}_i$ の全系の離散化運動方程式に変換し、次式を得る。

$$\ddot{\bar{b}}_i + \eta_{\text{tot}}^{(i)} \omega^{(i)} \dot{\bar{b}}_i + (\omega^{(i)})^2 \bar{b}_i + \sum_{j,k} D_{ijk} \bar{b}_j \bar{b}_k + \sum_{j,k,l} E_{ijkl} \bar{b}_j \bar{b}_k \bar{b}_l - P_i = 0 \quad \dots \dots (A1)$$

$$\bar{D}_{ijk} = \gamma \frac{n_i}{2n_j n_k} \bar{\phi}_{\alpha ix} \bar{\phi}_{\alpha jx} \bar{\phi}_{\alpha kx},$$

$$\bar{E}_{ijkl} = \gamma \frac{n_i}{3n_j n_k n_l} \bar{\phi}_{\alpha ix} \bar{\phi}_{\alpha jx} \bar{\phi}_{\alpha kx} \bar{\phi}_{\alpha lx},$$

$$\bar{P}_i = n_i \{\phi^{(i)}\}_0^T \{f\},$$

$$\{\phi^{(i)}\}_0 = \{\bar{\phi}_{1ix}, \bar{\phi}_{1jx}, \bar{\phi}_{1kx}, \bar{\phi}_{2ix}, \bar{\phi}_{2jx}, \bar{\phi}_{2kx}, \bar{\phi}_{3ix}, \dots\}^T$$

($i=1,2,3,\dots,j=1,2,3,\dots,k=1,2,3,\dots,l=1,2,3,\dots$)

Fig.A1 Schematic model for numerical analysis

ただし、節点変位ベクトル $\{u\}$ を i 次の線形固有振動数 $\omega^{(i)}$ に対応する線形固有振動形 $\{\phi^{(i)}\}_0$ と基準座標 $\bar{b}_i$ を用いて次式のように記述してある。

$$\{u\} = \sum_{i=1} \bar{b}_i \frac{1}{n_i} \{\phi^{(i)}\}_0 \dots \dots \dots (A2)$$

また、 γ_2, γ_3 はそれぞれ非線形集中ばねの2次および3次のばね定数である。 $\{f\}$ は外力ベクトルである。 $\eta_{\text{tot}}^{(i)}$ は i 次のモード損失係数であり、減衰パラメータを漸近展開し、微小振幅の運動方程式に代入して微小量の1次までを考慮することで求めた。 $\bar{\phi}_{\alpha ix}$ は集中ばねとブロックの接合節点 α における x 方向の $\{\phi^{(i)}\}_0$ の成分である。式(A1)の解を仮定し、調和バランス法を用いて共振応答を求めた。

A 4. 結果と結言

非線形集中ばね、粘弾性ブロックの材料損失係数を $\eta_b=0.01$ 、 $\eta_b=0.2$ とし、ブロックのヤング率 E が異なる場合の共振応答を図A2(a)と図A2(b)に示す。近似モード数は $Ic=20$ とした。ブロックのヤング率 E が大きい場合、最低次の共振応答曲線が漸硬型となる。さらに、最低次の共振の3倍高調波共振と1/3分数次調波共振が新たに現れる。ヤング率 E が小さい場合、ばね変形が主体の振動モードにブロック弾性変形が含まれ、1次モードの減衰(モード損失係数 $\eta_{\text{tot}}^{(i)}$)が大きくなる。その減衰増大の効果により、最低次の共振の3倍高調波共振がジャンプしなくなるとともに1/3分数次調波共振が認められなくなる。

Fig.A2 Effects of Young's modulus on resonance response

1. 緒 言

機械構造物を集中ばねで支持し振動絶縁することがある。防振要素には荷重と変位の間に非線形性を持つものもある。一方、機械構造物は一般に弾性体であり、弾性体と非線形ばねを接続した問題の解明が重要である。著者らは構造物を線形有限要素により弾性体としてモデル化し、非線形集中ばねで支持した系の連成振動解析を行ってきた⁽¹⁾。本論では、線形ヒステリシス減衰を有する非線形集中ばねで粘弾性ブロックを支持し、鉛直方向の周期加振力を加え動的応答を解析する。また、ブロックと集中ばねの散逸エネルギー分担量を解析し、共振応答への影響を検討した。

2. 解析モデル

非線形集中ばねを接続した粘弾性ブロックのモデルを図1に示す。粘弾性ブロックは微小変形を仮定し、さらに複素弾性率を導入した有限要素法を用いた。図中の剛なガイドを設置し、ブロックのガイド面に法線方向の運動を拘束した。減衰を考慮しない条件での非線形集中ばねの復元力 $R_{\alpha x}$ -変位 $U_{\alpha x}$ 曲線を図2に示す。三次の非線形復元項を有する漸硬ばねとした。この特性に線形ヒステリシス減衰を与え以降の計算を行った。

3. 基礎式

図1のように粘弾性ブロックに非線形集中ばねが接続される場合を考える。この系の有限要素による離散化方程式を求める。

3.1 非線形集中ばねの離散化方程式 非線形集中ばねは図1の x 方向に弾性主軸を有するとする。非線形集中ばねと粘弾性ブロックが接合される節点 α の x 方向変位を $U_{\alpha x}$ とおく。ばねによる節点力 $R_{\alpha x}$ が次式で与えられる場合を考える。

$$R_{\alpha x} = \gamma_1 U_{\alpha x} + \gamma_2 U_{\alpha x}^2 + \gamma_3 U_{\alpha x}^3 \dots \dots \dots (1)$$

ただし、この集中ばねには線形ヒステリシス減衰を導入

Fig.1 Schematic model for numerical analysis

Fig.2 Restoring force of nonlinear concentrated spring

し $\gamma_1 = \gamma_1(1 + j\eta_s)$ とする。ここで、 γ_1 は γ_1 の実数部、 η_s は集中ばねの材料損失係数、 j は虚数単位である。この関係をマトリックスで記述すると次式となる。

$$\{r\} = [\gamma_1]\{U_s\} + \{\bar{d}\} \dots \dots \dots (2)$$

ここで、

$$\{r\} = \{R_{\alpha x} \ R_{\alpha y} \ R_{\alpha z}\}^T, \quad \{U_s\} = \{U_{\alpha x} \ U_{\alpha y} \ U_{\alpha z}\}^T, \\ [\gamma_1] = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \{\bar{d}\} = \begin{bmatrix} \gamma_2 U_{\alpha x}^2 + \gamma_3 U_{\alpha x}^3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$R_{\alpha y} = R_{\alpha z} = 0$$

である。

3.2 粘弾性ブロックの離散化方程式 ブロックは三次元有限要素で分割する。ブロックには微小変形を仮定し線形三次元有限要素を用いる。要素内部の変位ベクトルを $\{U_b\} = \{U_{bx} \ U_{by} \ U_{bz}\}^T$ とおき、 $\{U_b\}$ を節点変位ベクトル $\{U_e\}$ と形状関数 $[N]^T$ で次式のように近似する。

$$\{U_b\} = [N]^T \{U_e\} \dots \dots \dots (3)$$

非適合モードを考慮した8節点 isoparametric solid 要素でブロックをモデル化した^{(2),(3)}。

応力ベクトル $\{\sigma\}$ と歪みベクトル $\{\epsilon\}$ との関係は、次式となる。

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\} \dots \dots \dots (4)$$

$[D]$ はヤング率とポアソン比で構成される。 $\{U_b\}$ と歪みベクトル $\{\epsilon\}$ との関係は次式となる。

$$\{\epsilon\} = [A]\{U_b\} = [B]\{U_e\} \dots \dots \dots (5)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad [B] = [A][N]^T \dots \dots \dots (6)$$

要素の歪みエネルギー $\bar{U}$ 、運動エネルギー $\bar{T}$ 、ポテンシャルエネルギー $\bar{V}$ を求め、ラグランジェの方程式からブロックの要素の離散化方程式を次式から得る。

$$[M_e]\{\ddot{u}_e\} + [K_e]\{u_e\} = \{f_e\} \dots \dots \dots (7)$$

$$[M_e] = \iiint_e \rho_e [N][N]^T dx dy dz \dots \dots \dots (8)$$

$$[K_e] = \iiint_e [B]^T [D] [B] dx dy dz \dots \dots \dots (9)$$

ここで、 $\iiint_e dx dy dz$ は要素領域内での積分を表す。 $[M_e]$ 、 $[K_e]$ 、 $\{u_e\}$ 、 $\{f_e\}$ はそれぞれブロックの要素質量行列、要素剛性行列、要素内の節点変位ベクトル、要素内の節点力ベクトルである。 ρ_e は要素 e の質量密度である。また、式中の $\dot{}$ は時間微分を表す。

粘弾性特性を考慮するためにブロックの弾性率 E を複素弾性率 ($E = E(1 + j\eta_b)$ 、 E : 弾性率の実部、 η_b : ブロックの材料損失係数) とする。その結果、式(4)中の $[D]$ が複素数となり、さらに式(7)、式(9)中の要素剛性行列 $[K_e]$ も複素行列となる。

ブロック全系で要素方程式を重ね合わせると次式を得る。

$$[M_b]\{u_b\} + [K_b]\{u_b\} = \{f_b\} \dots \dots \dots (10)$$

$[M_b]$, $[K_b]$, $\{f_b\}$, $\{u_b\}$ はブロック全系の質量行列, 複素剛性行列, 節点力ベクトル, 変位ベクトルである。

3.3 粘弾性ブロックを集中ばねに接続した系の離散化方程式 式(2)の $\{f\}$ を式(10)中の粘弾性ブロックと非線形ばねの接合節点 α の節点力に加え全系の離散化方程式を得る。

$$[M]\{u\} + [K]\{u\} + \{\hat{d}\} = \{f\} \dots \dots \dots (11)$$

ただし, $\{u\}$, $[M]$, $[K]$, $\{f\}$ は全系の変位ベクトル, 質量行列, 複素剛性行列, 節点力ベクトルである。 $\{\hat{d}\}$ は $\{\bar{d}\}$ を全系のサイズに変換したベクトルである。

3.4 モード減衰の近似計算 式(11)で外力項, 非線形復元力項を $\{0\}$ とし $\{u\} = \{\phi\} \exp(j\omega t)$ を仮定すると, 次の複素固有値問題の式を得る。

$$\sum_{e=1}^{e_{\max}} ([K_R]_e (1+j\eta_e) - (\omega^{(i)})^2 (1+j\eta_{\text{tot}}^{(i)}) [M]_e) \{\phi^{(i)}\} = \{0\} \dots \dots \dots (12)$$

$[K_R]_e$ は要素剛性行列の実数部, $[M]_e$ は要素質量行列である。添え字 (i) は i 次振動モード, $(\omega^{(i)})^2$ は複素固有値の実部, $\{\phi^{(i)}\}$ は複素固有モード, $\eta_{\text{tot}}^{(i)}$ はモード損失係数, $e_{\max}$ は要素数である。

材料減衰 η_e , ($e=1, 2, 3, \dots, e_{\max}$)に関し全要素の中で最大のものを $\eta_{\max}$ とする。また, 以下の β_e を導入する。

$$\beta_e = \eta_e / \eta_{\max}, \beta_e \leq 1 \dots \dots \dots (13)$$

ここで $\eta_{\max} \ll 1$ と仮定し, 微少量 $\mu = j\eta_{\max}$ を導入し, 式(12)の解を漸近展開すると, 次式を得る。

$$\{\phi^{(i)}\} = \{\phi^{(i)}\}_0 + \mu \{\phi^{(i)}\}_1 + \mu^2 \{\phi^{(i)}\}_2 + \dots \dots \dots (14)$$

$$(\omega^{(i)})^2 = (\omega_0^{(i)})^2 + \mu^2 (\omega_2^{(i)})^2 + \mu^4 (\omega_4^{(i)})^2 + \dots \dots \dots (15)$$

$$j\eta_{\text{tot}}^{(i)} = \mu\eta_1^{(i)} + \mu^3\eta_3^{(i)} + \mu^5\eta_5^{(i)} + \mu^7\eta_7^{(i)} + \dots \dots \dots (16)$$

ただし, $\beta_e \leq 1$ であるので $\eta_{\max} \beta_e \ll 1$ が成立し $\mu \beta_e$ も μ と同様に微少量となる。 $\{\phi^{(i)}\}_0$, $\{\phi^{(i)}\}_1$, $\{\phi^{(i)}\}_2 \dots$ と $(\omega_0^{(i)})^2$, $(\omega_2^{(i)})^2$, $(\omega_4^{(i)})^2, \dots$ および $\eta_1^{(i)}$, $\eta_3^{(i)}$, $\eta_5^{(i)} \dots$ は実数とする。

ついで式(14)式(15)式(16)を式(12)に代入し, μ^0 と μ^1 の量ごとにまとめると次式を得る。

μ^0 の量:

$$\sum_{e=1}^{e_{\max}} ([K_R]_e - (\omega_0^{(i)})^2 [M]_e) \{\phi^{(i)}\}_0 = \{0\} \dots \dots \dots (17)$$

μ^1 の量:

$$\sum_{e=1}^{e_{\max}} (\mu \beta_e [K_R]_e - \mu \eta_1^{(i)} (\omega_0^{(i)})^2 [M]_e) \{\phi^{(i)}\}_0 + \sum_{e=1}^{e_{\max}} (\mu [K_R]_e - \mu (\omega_0^{(i)})^2 [M]_e) \{\phi^{(i)}\}_1 = \{0\} \dots \dots \dots (18)$$

さらに式(17), (18)を整理すると次式を得る。

$$\eta_{\text{tot}}^{(i)} = \sum_{e=1}^{e_{\max}} \eta_e S_e^{(i)} \dots \dots \dots (19)$$

ただし, $S_e^{(i)} = \{\phi^{(i)}\}_0^T [K_R]_e \{\phi^{(i)}\}_0 / \sum_{e=1}^{e_{\max}} \{\phi^{(i)}\}_0^T [K_R]_e \{\phi^{(i)}\}_0$ は i 次振動モードで変形した条件での各要素の歪みエネルギー分担率(要素 e の歪みエネルギー/全系の歪みエネルギー)である。 $\{\phi^{(i)}\}_0$ は実固有モードで式(17)から求められ, 式(17)から共振周波数 $\omega^{(i)}/2\pi \approx \omega_0^{(i)}/2\pi$ が求められる。式(19)からモード損失係数 $\eta_{\text{tot}}^{(i)}$ は材料減衰 η_e と歪みエネルギー分担率 $S_e^{(i)}$ との積の全要素にわたる和から近似計算できる。ここで, $\eta_e S_e^{(i)}$ は各要素の散逸エネルギーの分担量に相当し, これが大きい要素ほどモード損失係数 $\eta_{\text{tot}}^{(i)}$ への影響が大きい場所となる。なお, この減衰特性の近似計算式は先に著者らが粘弾性体と弾性体を組み合わせた構造の振動減衰を解析するために導出したものと同様な形式で, 微小変形条件のもとでの実験や理論解との検証がなされて

いる⁽⁴⁾。また, 式(19)は, Johnsonらが開発したモード歪みエネルギー法⁽⁵⁾とも結果的に同じ形式になっている。

3.5 非線形離散化方程式の基準座標への変換 式(11)のような物理座標系で記述された運動方程式は自由度が大きく, 直接計算すると膨大な時間が必要となる。そこで, 式(11)に線形固有振動モードに対応する基準座標を導入し, 自由度を縮小する。ただし, 線形固有振動モード $\{\phi^{(i)}\}$ は3章4節の $\{\phi^{(i)}\}_0$ で $\{\phi^{(i)}\} \approx \{\phi^{(i)}\}_0$ と近似できるものとする。この $\{\phi^{(i)}\}_0$ に対応する基準座標 $\bar{b}_i$ を導入し, 変位 $\{u\}$ を $\bar{b}_i$ で次式のように記述する。

$$\{u\} = \sum_{i=1}^n \bar{b}_i \frac{1}{n_i} \{\bar{\phi}^{(i)}\}_0 \dots \dots \dots (20)$$

ただし,

$$\{\phi^{(i)}\}_0 = \frac{1}{n_i} \{\bar{\phi}^{(i)}\}_0, \quad n_i = \frac{1}{\sqrt{m_i}},$$

$$m_i = \{\phi^{(i)}\}_0^T [M] \{\phi^{(i)}\}_0, \quad \{\bar{\phi}^{(i)}\}_0^T [M] \{\bar{\phi}^{(i)}\}_0 = 1$$

である。

式(20)を式(11)へ代入し, $\{\bar{\phi}^{(i)}\}$ の直交性を利用して整理すると, 基準座標系での全系の離散化運動方程式として次式を得る。

$$M(\ddot{\bar{b}}_i) = \ddot{\bar{b}}_i + \eta_{\text{tot}}^{(i)} \omega^{(i)} \dot{\bar{b}}_i + (\omega^{(i)})^2 \bar{b}_i + \sum_j \ddot{D}_{ijk} \bar{b}_j \bar{b}_k + \sum_j \sum_k \sum_l E_{ijkl} \bar{b}_j \bar{b}_k \bar{b}_l - P_i = 0 \dots \dots \dots (21)$$

ただし,

$$\ddot{D}_{ijk} = \gamma_2 \frac{n_i}{n_j n_k} \bar{\phi}_{\alpha ix} \bar{\phi}_{\alpha jx} \bar{\phi}_{\alpha kx},$$

$$\ddot{E}_{ijkl} = \gamma_3 \frac{n_i}{n_j n_k n_l} \bar{\phi}_{\alpha ix} \bar{\phi}_{\alpha jx} \bar{\phi}_{\alpha kx} \bar{\phi}_{\alpha lx},$$

$$\ddot{P}_i = n_i \{\phi^{(i)}\}_0^T \{f\},$$

$$\{\bar{\phi}^{(i)}\}_0 = \{\bar{\phi}_{1ix}, \bar{\phi}_{1iy}, \bar{\phi}_{1iz}, \bar{\phi}_{2ix}, \bar{\phi}_{2iy}, \bar{\phi}_{2iz}, \bar{\phi}_{3ix}, \dots\}^T$$

また, $\bar{\phi}_{\alpha ix}$ は非線形集中ばね-粘弾性ブロックの接合節点 α における x 方向の i 次固有ベクトル $\{\phi^{(i)}\}_0$ の成分である。

式(21)は線形固有振動形に対応した基準座標 $\bar{b}_i$ についての非線形連立三次常微分方程式である。なお, 式(21)中の右辺第2項の減衰項であるが, 定式化の過程で式(19)と同じ形が得られ, 無理なく式(21)にモード損失係数 $\eta_{\text{tot}}^{(i)}$ を導入できていることを付記しておく。

また, $\eta_{\text{tot}}^{(i)}$ は微小変形条件の歪みエネルギーから式(19)により求めている。非線形集中ばねについては微小変形ではないので非線形ばね定数 γ_2, γ_3 が線形ばね定数 γ_1 よりも充分に小さいという弱非線形性の仮定が本解析法を用いるうえで必要となる。

基準座標 $\bar{b}_i$ についての式(21)により, 物理座標での離散化方程式(11)に比べ, 大幅に計算に必要な自由度を削減できる。後述する数値計算例では, 物理座標では15,504自由度であったが, 基準座標では20自由度程度の計算となっている。

3.6 非線形周期応答 外力 $\bar{P}$ を単一の角周波数 ω による加振力であると仮定する。すなわち式(21)中の $\{f\}$ は $\{f\} = \{P_d\} \cos \omega t$ となる。加振振幅 $\{P_d\}$ は加振位置に対応する節点 α で加振方向の成分のみ非ゼロとなる。この場合の周期応答を求めるため, 対応する解を次式で仮定する。

$$\bar{b}_i = C_{i1\mu 0} + \sum_p [C_{i1\mu p} \cos(\mu p \omega t) + C_{i2\mu p} \sin(\mu p \omega t)] \dots \dots \dots (22)$$

($i, p=1, 2, 3, \dots$)

なお, $C_{i1\mu p}$, $C_{i2\mu p}$ ($i, p=1, 2, 3, \dots$)は未定係数である。主共振や高調波共振応答を求めるには $\mu=1$ とおき, 分次調波共振応答では, $\mu=1/n$ (n : 整数)を用いる。式

(22) を式 (21) に代入し、調和バランス法を適用すると、つぎの条件式を得る。

$$\frac{\mu s \omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\mu s \omega}} M(\tilde{b}_i) \cos(\mu p \omega t) dt = 0, (s=0,1,2,3,\dots)$$

$$\frac{\mu s \omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\mu s \omega}} M(\tilde{b}_i) \sin(\mu p \omega t) dt = 0, (s=1,2,3,\dots) \dots (23)$$

上式より得られる $C_{i1\mu p}, C_{i2\mu p}$ ($i, p=1,2,3,\dots$) に関する連立三次方程式をニュートンラプソン法で解くと、共振応答の周期解を得る。評価点 ξ における応答振幅の x 方向成分の実効値 W_{rms} は次式 (24) から求められる。

$$W_{rms} = \left\{ (1/2) \left[\left(\sum_p C_{i1\mu p} \frac{1}{n_i} \tilde{\phi}_{\xi ix} \right)^2 + \left(\sum_p C_{i2\mu p} \frac{1}{n_i} \tilde{\phi}_{\xi ix} \right)^2 \right] + \left(\sum_p C_{i2\mu 0} \frac{1}{n_i} \tilde{\phi}_{\xi ix} \right)^2 \right\}^{1/2} \dots \dots \dots (24)$$

($i=1,2,3,\dots, p=1,2,3,\dots$)

ここで、 $\tilde{\phi}_{\xi ix}$ は応答観測位置 ξ における i 次振動形に対応する固有ベクトルの x 方向成分である。

4. 計算結果

4.1 計算方法の検証 提案法について解析法と開発プログラムを検証し、他の解析方法で解が得られる条件での結果を比較する。具体的には、1. 微小振幅の条件と 2. 剛体ブロック+非線形集中ばねの条件で検証を行う。

以降の計算では、非線形集中ばねのばね定数は $\gamma_1 = 980 [\text{N/mm}]$, $\gamma_2 = 0 [\text{N/mm}^2]$, $\gamma_3 = 9.8 [\text{N/mm}^3]$ と弱非線形の条件とした。また、式 (17) の固有値計算にはサブスペース法を用いた。以降、記号 (i, j) により共振応答を分類した。 i は誘起される i 次の振動モードを表す。 j は共振応答の種類で $j=1$ は主共振、 $j=1/3$ は $1/3$ 次分数次調波共振、 $j=3/1$ は 3 倍の高調波共振に対応した応答となる。

(1) 微小振幅条件下での検証 提案 FEM では、式 (17) で求めた固有モードを基準座標とする運動方程式 (21) を用いて、非線形振動応答の計算効率を高めている。したがって非線形振動応答の計算精度に線形固有モードの精度が影響する。そのため、汎用の線形 FEM (NASTRAN) で得られる共振周波数、線形固有振動モード、モード損失係数と式 (17) から得られる共振周波数 $\omega^{(i)}/2\pi$ ($i=1, 2, 3, \dots$)、線形固有振動モード $\{\tilde{\phi}^{(i)}\}$ ($i=1, 2, 3, \dots$)、モード損失係数 $\eta_{tot}^{(i)}$ ($i=1, 2, 3, \dots$) を比較した。集中ばねの材料損失係数を $\eta_s = 0.01$ 、ブロックの材料損失係数を $\eta_b = 0.2$ としてモード損失計数 $\eta_{tot}^{(i)}$ を式 (19) から求めた。

まず、線形固有振動モード $\{\tilde{\phi}^{(i)}\}$ を図 3 に記載する。 $\{\tilde{\phi}^{(i)}\}$ は提案 FEM と NASTRAN でよく一致していたため、提案 FEM の結果のみを示す。Mode1 の図中の矢印は、非線形集中ばねが主体に変形し、ブロックが矢印の方向 (x 方向) に剛体に近い運動をすることを表す。2 次以上の高次のモードは

ブロックの弾性モードになっている。なお、Mode5 と Mode10 は縦波による共振の振動モードである。

各次数のモード損失係数 $\eta_{tot}^{(i)}$ と共振周波数 $\omega^{(i)}/2\pi$ を図 4 に示す。提案 FEM の結果と NASTRAN の結果はよく一致した。なお、図中にある NASTRAN による $\eta_{tot}^{(i)}$ の値は、各要素の歪みエネルギー分比率 $S^{(i)}$ を NASTRAN で計算し、式 (19) を、別途作成したプログラムで計算したものである。

これらのパラメータを用いて、微小振幅条件のもとでの共振応答を式 (22)、式 (23)、式 (24) による提案 FEM+調和バランス法で求める。その結果と次式の線形のモード重ね合わせ法⁽⁸⁾ で求めた共振応答を比較し検証する。

$$w = \tilde{w} \cos \omega t$$

$$\tilde{w} = \sum_i \tilde{\phi}_{\xi ix} \tilde{\phi}_{\xi ix} p_d / ((\omega^2 - (\omega^{(i)})^2 + j \eta_{tot}^{(i)} (\omega^{(i)})^2) \dots (25)$$

ここで、加振点を ζ 、観測点 ξ をとし、加振方向は x 方向とした。 w は観測点 ξ における x 方向の応答振幅、 j は虚数単位である。また、 $\tilde{\phi}_{\xi ix}$ は i 次固有ベクトル $\{\tilde{\phi}^{(i)}\}$ の加振節点 ζ に対応する x 方向成分である。 $\tilde{\phi}_{\xi ix}$ は先に示したように $\{\tilde{\phi}^{(i)}\}$ の観測点 ξ に対応する x 方向成分である。単一の角周波数 ω により励振を受ける場合の線形応答の検証問題なので、 w の実効値 W_{rms} は、次式 (26) から求められる。

$$W_{rms} = |W| / \sqrt{2} \dots \dots \dots (26)$$

外力を非常に小さく ($P_d = 0.098 [\text{N}]$) する条件で、提案 FEM と調和バランス法により求めた応答と式 (25) による応答を比較する。図 5 に 20 モード近似での結果を示す。図より、両者は各共振ピークが減衰される様子など、よく一致している。

(2) ブロックが剛体の条件下での検証 粘弾性ブロックを集中質量に置き換え、集中質量-非線形集中ばね系 (1 自由度質量ばね系) で非線形周期応答を求めた。具体的には、次式 (27) を Runge-Kutta-Gill 法で直接積分し時刻歴を求め、実効値を計算し共振応答を求めた。

$$m\ddot{w} = -(\gamma_1 w + \gamma_2 w^2 + \gamma_3 w^3) - C\dot{w} + F \dots (27)$$

ここで、 m は弾性ブロックの質量を集中質量に置き換えた量である。 w は質量の変位、 F は質量に作用する外力で $F = p_d \cos \omega t$ とした。 p_d は周期外力の振幅である。減衰定数は $C = \eta_s (m \gamma_1)^{1/2}$ から求めた。

この結果と提案 FEM においてブロックのヤング率 E を非常に大きくした場合 ($E = 10^5 [\text{GPa}]$) の共振応答の計算結果を比較した。提案 FEM による応答の計算には、先に述べた調和バランス法を 1 モード近似で使い、加振位置と観測位置は非線形集中ばねとブロックの接合節点 α とした。集中ばねの材料損失係数を $\eta_s = 0.01$ 、ブロックの材料損失係数を $\eta_b = 0.1$ とした。これらの条件では式 (19) から系の

Fig.3 Verification of Proposed method (Vibration mode)

モード損失係数は $\eta_{\text{tot}}^{(1)}=0.01$ になる。式(21)の外力項 $\vec{P} = n_{\alpha} \{ \phi^{(1)} \}^T$ 中の $\{f\}$ について、加振節点 α に対応する x 方向成分のみに $P_d \cos \omega t$ を与え、他の成分はゼロとした。ここで1次共振は図3のModelに対応しており、弾性ブロックを質量とし、非線形集中ばねが主体に変形するモードである。このモードは式(27)の集中質量-非線形集中ばね系(1自由度質量ばね系)で現れる振動モードと対応する。その系での応答の計算結果と、提案FEMでブロックのヤング率を非常に大きくした剛体ブロックの場合($E=10^5$ [GPa])の応答の計算結果を比較した。結果を図6に示す。横軸を加振周波数 $\omega/(2\pi)$ [Hz]、縦軸を変位の実効値 W_{rms} [mm]とした。非線形集中ばねの影響が現れるまで加振力を大きくした条件($P_d=9800$ [N])を用いた。図より、両者の結果はピークの高さ、ピーク周波数ともによく一致している。これより、剛体ブロックの条件で、提案FEMとプログラムが検証できた。

以上のように、提案法は微小振幅条件や剛体ブロック条件で、従来の解析法の結果と一致し検証できた。

4.2 ブロックの応答に及ぼすヤング率の影響

つぎに粘弾性ブロックのヤング率 E 、材料損失係数 η_b が減衰振動に与える影響を調べる。

(1) 振動モード ヤング率 E を1GPaから210GPaまで変化させた場合の振動モード $\{\phi^{(1)}\}_0$ は、先に示した図3とマクロでは変化はなかった。

(2) モード損失係数、共振応答とブロックのヤング率の関係 粘弾性ブロックのヤング率 E が異なる場合の1次モード(非線形集中ばね主体の振動モード)の減衰 $\eta_{\text{tot}}^{(1)}$ を比較する。図7にブロックと集中ばねの歪みエネルギー分担率 $S_b^{(1)}$ 、 $S_s^{(1)}$ を示す。 $S_b^{(1)}$ はブロックに対応する要素を e_b 、その総数を $e_{b\text{max}}$ とすると次式で求められる。

$$S_b^{(1)} = \sum_{e_b=1}^{e_{b\text{max}}} S_e^{(1)}$$

ヤング率が小さい場合は、集中ばねが接続されている部分(節点 α)のブロックが弾性変形することが振動モード $\{\phi^{(1)}\}_0$ の観察からわかっている。したがって、図7のように、ブロックのヤング率が小さくなると、ブロックの歪みエネルギー分担率 $S_b^{(1)}$ が高くなるかわりに非線形集中ばね

Fig.4 Resonant frequency and modal loss factor

Fig.5 Verification of Proposed method (response under infinitesimal displacement)

の歪みエネルギー分担率 $S_s^{(1)}$ が低くなる。一方、式(19)より、モード損失係数 $\eta_{\text{tot}}^{(1)}$ は、各要素の歪みエネルギー分担率 $S_e^{(1)}$ と、要素の材料減衰の積 $\eta_e S_e^{(1)}$ の全要素の総和で近似できる。すなわち、集中ばねの材料損失係数 η_b が粘弾性ブロックの材料損失係数 η_b より小さい条件($\eta_b=0.01$, $\eta_b=0.2$)を考えると、ブロックのヤング率 E が大きいほど、ばねの歪みエネルギー分担率 $S_s^{(1)}$ が高くなり、その結果、図8のように1次モードの減衰(モード損失係数 $\eta_{\text{tot}}^{(1)}$)が小さくなる現象が起こる。

$\eta_b=0.01$, $\eta_b=0.2$ の条件でヤング率 E が210GPaと1GPaの場合の共振応答を図9(a)と図9(b)にそれぞれ示す。調和バランス法による応答の近似モード数は $I_c=20$ とした。横軸を加振周波数 $\omega/(2\pi)$ [Hz]、縦軸を図1の観測点の変位の実効値 W_{rms} [mm]とした。また、外力 P_d を $P_d=9800$ [N]とした。ヤング率 E が大きい場合、最低次の共振応答曲線(1, 1/1)が漸硬型となる。さらに、最低次の共振の3倍高調波共振(1, 3/1)と1/3分数次調波共振(1, 1/3)が新たに現れる。ヤング率 E が小さい場合、この条件では先ほど述べたように1次モードの減衰(モード損失係数 $\eta_{\text{tot}}^{(1)}$)が大きくなり、最低次の共振の3倍高調波共振(1, 3/1)がジャンプしなくなるとともに1/3分数次調波共振(1, 1/3)が認められなくなる。

観測点を、粘弾性ブロックの底面の一角(観測点 ξ)だけでなく、ブロックと非線形集中ばねの接合節点(観測点 α)とした場合も計算した。ブロックの材料損失係数を

Fig.6 Verification of proposed method for rigid block

Fig.7 Effect of Young's modulus on share of strain energy

Fig.8 Effect of Young's modulus on modal loss factor

($\eta_b=0.2$), 集中ばねの材料損失係数を($\eta_s=0.01$)とした。ブロックのヤング率が異なる場合 ($E=1$ [GPa], $E=210$ [GPa]) の共振応答を求め、図 10(a) と図 10(b) にそれぞれ示す。最低次モードでは、ヤング率が 1 GPa の場合、ブロックと集中ばねの接合節点 α が弾性変形するために二つの観測点 α と ξ 間の変位に差があるが、ヤング率が 210 GPa の場合では、接合節点 α が弾性変形しにくくなり、ヤング率が 1 GPa の場合と比べ、観測点 α と ξ 間の変位に差がない。x 方向並進以外の剛体モードはガイドで拘束しているので、この差は弾性変形によるものといえる。

近似モード数 I_c を変化させて共振応答を求めた。図 11(a) と図 11(b) に、ヤング率を $E=210$, $E=1$ [GPa] とした結果を示す。図中、 $I_c=1$, $I_c=2$, $I_c=5$, $I_c=10$, $I_c=20$ の条件での結果が示されている。ブロックの材料損失係数を($\eta_b=0.2$), 集中ばねの材料損失係数を($\eta_s=0.01$)とした。粘弾性ブロックのヤング率が大きい場合 ($E=210$ [GPa], 図 11(a)) には、 $I_c=1$ と $I_c=20$ を比較しても、変位に大きな差は現れない。よって、ヤング率 E が大きい場合、少数の近似モード数 I_c での計算が可能といえる。一方、ヤング率 E が小さい場合 ($E=1$ [GPa], 図 11(b)), 近似モード数 I_c が多くなるほど、非線形の応答振幅が徐々に大きくなる。この場合、近似モード数 I_c は 20 以上必要である。

図 12 に図 11 中の 1 次振動モードに含まれる各振動モードの振幅成分を大きい順に 15 成分記載した。これより式 (21) 中の非線形項 D_{ijk} , E_{ijkl} に起因するモード連成を調べることが可能である。図の縦軸は応答の実効値 W_{rms} への各モードの寄与率、横軸は振幅成分への大きさの順位である。図中の記号 $[x,y]_z$ の x は振動モードの次数、 $y=1/1$ は基本調波成分、 $y=3/1$ は 3 倍高調波成分を表す。 z の箇所が無表記のものは式 (22) の $\cos$ 成分、 s の表記のあるものは $\sin$ 成分に相当することを表す。加振周波数 $\omega/2\pi$ は 1 次の共振周波数 $\omega^{(1)}/2\pi$ と一致する条件とし、近似モード数は $I_c=20$ とした。図から、ブロックの材料損失係数が大きい場合 ($\eta_b=0.2$, 図 12(b)), 1 次モードの基本調波 (1, 1/1) の $\sin$ 成分と 3 倍高調波 (1, 3/1) の $\sin$ 成分の寄与は、ブロックの材料損失係数が小さい場合 ($\eta_b=0.02$,

Fig.9 Effects of Young's modulus on resonance response

Fig.10 Effects of Young's modulus on resonance response

図 12(a)) よりも大きい。 $\sin$ 成分は、 $\cos$ 成分の加振力に対し、位相遅れの成分である。すなわち、加振力と変位の関係にヒステリシスを有するようになっている。ヒステリシス成分が大きい程、減衰効果が大きくなるため、ブロックの材料損失係数が大きい程、非線形共振応答は制振される。

5. 結言

非線形集中ばねで粘弾性ブロックを支持し、鉛直方向の周期加振力を加え動的応答を解析した。運動方程式を、線形固有振動形を基準座標とする三次の非線形連立常微分方程式に変換し、計算自由度を縮小した運動方程式に調和バランス法を適用し非線形共振応答を求めた。

集中ばねの材料損失係数がブロックの材料損失係数より小さい場合、ブロックのヤング率が小さくなると、ばね変形主体の振動モードにブロックの弾性変形が含まれ、モード損失係数が大きくなる。その減衰増大の効果により、対応するモードの高調波共振応答と分数次共振応答の発生が抑制される。

参考文献

- (1) 山口, 永井, 丸山, 油田, 機論 69-688C (2003), 3167-3174.
- (2) Zienkiewicz, O. C. 著, 吉識雅夫ほか訳, マトリックス有限要素法, (1970), 倍風館.
- (3) 鷲津久一郎, 宮本博, 山田嘉昭, 山本善之, 川井忠彦, 有限要素法ハンドブック I 基礎編, (1981), 1-427, 倍風館.
- (4) 山口善夫, 黒沢良夫, 松村修二, 野村章, 機論 69-678C (2003) 297-303.
- (5) Johnson, C. D., and Kienholz, D. A., AIAA Journal, 20-9, (1982), 1284-1290.
- (6) 長松昭男, モード解析, (1985), 倍風館.

Fig.11 Effects of assumed vibration modes on nonlinear frequency responses

Fig.12 Effects of assumed vibration modes on nonlinear frequency responses